

長岡技術科学大学大学院 博士論文

情報・制御工学専攻

重力波データ解析への Hilbert-Huang 変換の応用：  
ノイズに対する統計的性能評価  
および連星ブラックホール合体重力波の解析

酒井 一樹

指導教員 高橋 弘毅 印

長岡技術科学大学大学院 博士論文

情報・制御工学専攻

重力波データ解析への Hilbert-Huang 変換の応用：  
ノイズに対する統計的性能評価  
および連星ブラックホール合体重力波の解析

酒井 一樹

2018年3月

## 目次

1	はじめに	1
2	重力波天文学	3
2.1	相対性理論	3
2.2	重力波の方程式	7
2.3	重力波の生成と重力波の運ぶエネルギー	8
2.4	重力波源	9
2.5	重力波の検出	12
3	重力波データ解析	17
3.1	確率過程とガウスノイズ	17
3.2	マッチドフィルタ解析	21
3.3	波形の予測が困難な場合	27
4	Hilbert-Huang 変換	29
4.1	解析信号と瞬時周波数	29
4.2	離散 Hilbert 変換	34
4.3	複数のモードを重ね合わせた信号に対する Hilbert 変換	37
4.4	Hilbert-Huang 変換 (HHT) の定義	38
4.5	HHT の課題	41
4.6	Ensemble EMD (EEMD)	42
5	ガウスノイズに対する HHT の統計的性質	48
5.1	ガウスノイズの Hilbert 変換	48
5.2	ガウスノイズの瞬時振幅と瞬時周波数	51
5.3	ピアソン分布族	55
5.4	ガウスノイズの瞬時振幅と瞬時周波数の区間平均	63
5.5	異常検知への応用の検討	66
5.6	異常検知のシミュレーション	69
5.7	他のモデルとの比較	71
6	HHT を用いた連星ブラックホール合体重力波の解析	73
6.1	ブラックホール	73
6.2	BBH 重力波における QNM の開始時刻の推定	79
6.3	シミュレーション	84
6.4	実観測データへの適用	89
6.5	モード抽出条件の改良	91
7	まとめ	94

---

付録 A	検出器の感度曲線に基づいたガウスノイズの生成	96
A.1	標本信号による Fourier 変換の推定 . . . . .	96
A.2	パワースペクトル密度 . . . . .	97
A.3	有色ガウスノイズの生成 . . . . .	100
付録 B	ピアソン分布族による PDF 推定プログラム	101
付録 C	重力波の赤方偏移と光度距離	104
C.1	宇宙論的距離 . . . . .	104
C.2	数値相対論によるシミュレーション波形から観測データの生成 . . . . .	107

## 1 はじめに

2016年2月11日（日本時間では2月12日）にアメリカの研究グループ LIGO が記者会見を開き、重力波の人類初の直接観測を実現したことを発表した。これはアインシュタインが1916年に重力波の存在を予言してからちょうど100年間挑み続けた人類の快挙の知らせであった。この功績が認められ、2017年には LIGO グループの Weiss, Thorne, Barish の3名に対し、ノーベル物理学賞が授与された。現在までに3度の長期観測運転が実施され、計6件の重力波の直接検出の報告がなされており [1, 2, 3, 4, 5], 重力波天文学がすでに幕開いていると言えるだろう。ヨーロッパの Virgo [6] はすでに LIGO とともに観測運転に参加している。日本の KAGRA は初期の試験運転を実施できるところまできている [7]。これまでの6件の検出イベントの内、5件はブラックホール連星 (BBH: binary blackhole) 合体からの重力波であり、1件は中性子星連星合体からの重力波であった。この中性子星連星合体からの重力波の検出においては、光赤外線や、X線などの他の観測機関との連携が上手くいき、1つの天体現象を複数の種類で観測するというマルチメッセンジャー天文学の幕開けとなる大きなイベントとなった。この観測によって、金やプラチナなどの重い元素の生成機構と見られていたキロノヴァという天体現象が、中性子星連星合体によって起こっているということが確認された。今後さらに中性子星連星合体の発生頻度などが精度良く見積もられていけば、宇宙に存在する元素比率が説明できるようになることが期待される。重力波の観測によってその他にも、強い重力場や動的な重力場における一般相対性理論のさらなる検証や、これまでの観測とは独立な宇宙論パラメータの推定などが可能になることが期待されている。

重力波を一言で表すと時空のさざ波である。湖でボートを走らせると水面が揺らぎ、その揺らぎが波として伝わるように、質量を持った物体が加速度運動すると時空の揺らぎが波として伝わっていく。この現象は古典的なニュートン力学の中では存在せず、一般相対性理論によってその存在が導き出される。重力波は宇宙空間を光の速さで伝播する。電磁波などと異なり、物質との相互作用による散乱や吸収がほとんど起こらないため、他の手段では観測できないほど高密度な天体現象を情報を伝達することが可能となり、先述したような価値が期待されている。

しかし、これらのメリットが存在するのと同じ理由でデメリットも存在する。物質との相互作用が小さいということがその観測を非常に困難なものとしているのである。それゆえにその存在が予言されてから直接観測がなされるまでに100年の時間を要した。それに加えて、重力相互作用というのは非常に小さい相互作用である。万有引力とクーロン力はどちらも逆二乗則による長距離力であり、距離  $r$  離れた位置にある質量  $m_1, m_2$  を持つ質点に働く万有引力を  $F_g$  とし、距離  $r$  離れた位置にある電荷  $q_1, q_2$  を持つ点電荷に働くクーロン力を  $F_e$  とするとそれぞれ

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

というように非常によく似た形で表される。しかし、その係数  $G$  と  $k$  の値を比較すると、

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \quad (1.2)$$

$$k = 8.9876 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \quad (1.3)$$

と、20桁の差がある。電子の持つ電荷が  $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$  であるから、電子同士に働くクーロン力に相当する大きさの万有引力を生み出すためにはおよそ10 kgの質量が必要になるということである。重力相互作用によって発生する重力波もその振幅は非常に小さくなることがわかっていた。ただでさえ観測が困難な上に、振幅も小さいということが重なり、重力波に関する研究はその予言から40年以上ほとんど進展が

なかったという。その状況を打破したのは 1958 年頃にアメリカのメリーランド大学の Weber らが重力波検出器の作成にとりかかったことであった。1968 年には、Weber がメリーランドとさらにそこから 1000 km 離れたアルゴンヌ国立加速器研究所に置かれた 2 つの検出器で同時に重力波を検出したと発表した。理論上の感度がそこまで高くないことと、他のどの機関による追実験でも検出できなかったことから、一般に認められるには至らなかった。しかし、これを皮切りに、重力波にとどまらず一般相対性理論に関する実験的な研究は飛躍的に進展することになった。そして、1970 年代後半、アメリカで重力波観測の研究計画 LIGO (Laser Interferometric Gravitational wave Observatory) が開始した。

LIGO 計画の開始からおよそ 40 年以上経つてついに重力波の直接観測が実現された。それは光学素子や材料開発などの発展や制御機構の性能向上など、検出器の建設に対する非常に大きなハードルを乗り越えてやっと実現できたものである。それでもまだ、重力波の非常に小さな振幅と比較すると大きなノイズが含まれてしまう。重力波の検出や重力波を用いた物理の議論を行うためには高度なデータ解析技術もまた必要となっており、重力波のデータ解析はそれだけで 1 つの研究分野となっている。

本研究の目的は、データ解析によって、BBH 合体によって放射される重力波の観測データから、合体後のブラックホールの準固有振動 (QNM: quasinormal mode) の開始時刻を推定する手法を構築することである。ブラックホールの QNM による重力波は

$$h_{\text{QNM}}(t) = \text{Re} \left[ A_0 e^{-i(\omega(t-t_0)+\varphi_0)} \right] = A_0 e^{\omega_I(t-t_0)} \cos(\omega_R(t-t_0) + \varphi_0) \quad (1.4)$$

という減衰振動の式で表され、複素数の周波数  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  のことを QNM 周波数という。重力波の観測データからこの QNM 周波数を推定することで一般相対性理論の検証を行う手法が提唱されている。一方で、BBH 合体による重力波は Inspiral, Merger, Ringdown の 3 つの段階からなり、合体後に相当する Ringdown については形成されたブラックホールの QNM によるものが優勢となることがわかっている。したがって、BBH 合体重力波 Ringdown を調べることによって一般相対性理論の検証を行うことが期待される。しかしながら、BBH 合体重力波においてどこまでが Merger であるか、つまりどこから QNM が始まっているかを現象論的に決めるのは難しいのが現状であり、初検出された BBH 合体重力波における QNM 周波数を推定している論文 [8] においても、その開始時刻をパラメータとして複数の値での QNM 周波数の推定結果を示している。正確に QNM 周波数を推定するためには QNM の開始時刻の推定が必要である。本研究では比較的新しく提唱された時間-周波数解析手法である Hilbert-Huang 変換 (HHT) に着目し、この問題の解決に向けて取り組んだ。また、重力波のデータ解析においてはノイズの存在が避けられないこと、そして重力波が入射していない時間の観測データにはノイズしか含まれていなく、重力波が入射した瞬間の方が特殊であること、などの事実より、ノイズに対する解析手法の性能を評価しておくことが重要となる。そのことから、HHT のノイズに対する解析的・統計的な性能評価を行うことも合わせて本研究の目的とする。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章ではまず重力波のデータ解析の研究を進める上で土台となる重力波天文学の基礎的な内容について、数式とその物理的な意味を踏まえながら概説していく。第 3 章では重力波データ解析について、現在主流であるマッチドフィルタ解析を主軸に解説していく。この第 2,3 章の内容を踏まえて、局所的に高い分解能を出すことができる解析手法の必要性について見ていく。第 4 章では本論文で主として扱う解析手法である HHT の導入から定義、現在広く使われている拡張までを詳しく述べる。続く第 5 章で、HHT を白色ガウスノイズに適用した際の振る舞いを解析的および統計的に考察した結果を述べる。この考察結果を踏まえて、異常検知の枠組みに HHT を用いることもここで検討する。そして第 6 章で、BBH 合体からの重力波について、HHT の特性を活かして QNM の開始時刻を推定する新しい解析手法の提案およびその性能評価を行った結果を報告する。

## 2 重力波天文学

本章では本研究の題材である重力波データ解析について、その背景にある重力波天文学についてまとめていく。重力波は一般相対性理論の枠組みにおいて議論される対象であるため、まずは相対性理論についてそれが作り出された経緯を押さえながら、どのような理論なのかを概説する。続いて、一般相対性理論の理論の中で重力波という現象がどのように導き出されたか、どのような性質があると導かれるのか、について見ていく。その後、重力波を生成する現象としてどのような候補が考えられているのか、および、重力波を検出する原理についてまとめていく。

### 2.1 相対性理論

われわれの身の回りの物体の運動はニュートン力学によって実用上全く問題ない精度で計算できる。物体の質量を  $m$  とし、時刻  $t$  において物体に作用する力を  $\mathbf{f}(t)$  としたときの物体の位置  $\mathbf{x}(t)$  は

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

に従う。これを運動方程式という。一方で電流や磁場などを扱う電磁気学の枠組みにおける現象はマクスウェル方程式と呼ばれる4つの式に従う。電場を  $\mathbf{E}$ 、磁束密度を  $\mathbf{B}$ 、電荷密度を  $\rho$ 、電流密度を  $\mathbf{j}$  とし、真空の誘電率と透磁率をそれぞれ  $\varepsilon_0, \mu_0$  とするとマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (2.2)$$

と表される。真空中 ( $\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$ ) を考えると、これら4つの式より

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

という2つの方程式が得られる。 $\Delta := \nabla \cdot \nabla$  はラプラシアンであり、 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  は真空中の光速である。これらは真空中を電場や磁場が速さ  $c$  の波として伝播するというを表す波動方程式である。このようにして理論的に真空中を伝播する電場や磁場の波（電磁波）の存在が预言され、実際に1888年にヘルツによって実験でその存在が確認された。

ニュートンの運動方程式とマクスウェル方程式を使うことで身の回りの現象のほとんどが説明できる。しかしながら、マクスウェル方程式の帰結である電磁波をニュートン力学の枠組みで扱うとおかしなことが起こる。ニュートン力学ではまず、物体に働く力が釣り合っていればその物体が等速直線運動を続けるように見える座標系が存在することを仮定する。そのような座標系を慣性系という。運動方程式などは慣性系から見た場合において成立する法則である。そして基準となる慣性系に対して速度  $\mathbf{v}_A$  で運動している物体 A と速度  $\mathbf{v}_B$  で運動している物体 B があつたとき、物体 A から見ると物体 B は速度  $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$  で運動しているように見える。これを物体 A に対する物体 B の相対速度という。ニュートン力学では物体の速度というのは常にある基準に対する相対速度として扱うことになっている。一方で、マクスウェル方程式から電磁波の方程式を得る過程において速度の基準というのは特に指定していない。つまり、基準がどこであれ電磁波の伝播する速さは常に  $c$  だということになる。昔の科学者たちはそれはおかしいと思い、宇宙空間に電磁波の速度の基準となるエーテルと呼ばれる媒質が満ちていると仮定して、その存在を確かめようと様々な実験を行った。代表的なものが1887年に実施されたマイケルソン・モーリーの実験であり、結果と

して光速はどのように運動している基準から見ても一定であり、エーテルは存在しないということが証明された。

多くの科学者は光などの電磁気学における現象に対してなんとかニュートン力学の考え方を適応できるようにするために自然に対して様々な仮説を立てていた。エーテルもその1つである。その一方で、アインシュタインは観測結果を素直に受け止め、光の速度はどの基準から見ても同じであり光源の速さに依存しないという「光速度不変の原理」と、どんな慣性系でも物理法則の形は変わらないという「特殊相対性原理」という2つの原理を仮定して、ニュートン力学の方を修正しようと試みた。その結果作られた理論が特殊相対性理論である。ニュートン力学では物体の運動を表すときには  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  といった形で座標を時間の関数として記述していた。相対性理論では時間と座標を同等に扱い、 $\mathbf{x} = (t, x, y, z)$  のように4次元の時空と呼ばれる概念を導入する。全宇宙共通で1つの尺度であった時間を各慣性系の持つ物理量の1つとして扱うようにするということである。また、時空上の1点を世界点と呼ぶ。

ある慣性系  $S(t, x, y, z)$  における微小時間  $dt$  での光の軌跡を考えると、以下の式が成り立つ。

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = cdt \iff (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0. \quad (2.4)$$

光速度不変の原理より、この軌跡を別な慣性系  $S'(t', x', y', z')$  で見た場合も

$$(cdt')^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = 0 \quad (2.5)$$

が成り立たなくてはならない。この式の左辺を

$$d\tau^2 := (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.6)$$

と置く。光の軌跡については  $d\tau = 0$  であり、通常の物体の運動については  $d\tau > 0$  である。ある慣性系  $S(t, x, y, z)$  で静止している観測者の固有時は  $d\tau = cdt$  であることから、固有時というのは対象が静止して見える慣性系において感じる経過時間と対応していることがわかる。アインシュタインは慣性系間の変換において  $d\tau$  を不変にする変換を考えればよいという結論に辿り着いた。そしてそれはローレンツ変換と呼ばれる変換で実現可能であることがわかった。例として、ある慣性系  $S(t, x, y, z)$  に対して  $x$  軸方向に速度  $v$  で運動する慣性系  $S'(t', x', y', z')$  を考えると、ニュートン力学では

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.7)$$

という関係がある。これはガリレイ変換と呼ばれる。これに対し、ローレンツ変換は

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (2.8)$$

という式で表される変換である。 $v/c \rightarrow 0$  のもとでガリレイ変換に一致することがわかる。特殊相対性原理の言うどんな慣性系でも物理法則が変わらないというのはつまり、物理法則を表す式がローレンツ変換によって不変であるということの意味する。電磁気学はもともとローレンツ変換によって不変な形をしていたので、特殊相対性理論とは大雑把に言うと力学と電磁気学を統一して扱えるように作られた理論である。ローレンツ変換によって不変な  $d\tau$  は固有時と呼ばれる。

特殊相対性理論によってニュートン力学と電磁気学を統一した土台で扱えるようになった。しかし特殊相対性理論は議論を慣性系に限定している。したがって加速度運動するような座標系を扱うことはできない。アインシュタインは特殊相対性原理をさらに拡張し、どんな座標系でも物理法則の形は変わらない、という一般相対性原理を指導原理として理論を構築した。それが一般相対性理論である。特殊相対性理論が



特殊相対性原理に加えて光速不変の原理というもう 1 つの指導原理があつて導かれたように、一般相対性理論も一般相対性原理に加えてもう 1 つの指導原理があつた。等価原理と呼ばれるものである。

空間座標  $(x, y, z)$  における重力加速度を  $\mathbf{g}(x, y, z)$  と表すことにする。運動方程式は

$$m_I \frac{d^2 \mathbf{x}(x, y, z)}{dt^2} = -m_G \mathbf{g}(x, y, z) \quad (2.9)$$

となる。左辺の  $m_I$  は慣性質量、右辺の  $m_G$  は重力質量と呼ばれる。実験によってこれら 2 つの質量の値は非常に高い精度で一致することが確かめられているのだが、同一である必要性はどこにもない。そこで、どんな物体についてもこの 2 つが同一であるということを原理として認めることにする。それを等価原理という。ここで、以下のような座標変換を考える。

$$\mathbf{x}'(x', y', z') = \mathbf{x}(x, y, z) + \frac{1}{2} \mathbf{g}(x, y, z) t^2. \quad (2.10)$$

すると運動方程式は

$$\begin{aligned} m_I \frac{d^2 \mathbf{x}'(x', y', z')}{dt^2} &= m_I \frac{d^2 \mathbf{x}(x, y, z)}{dt^2} + m_I \mathbf{g}(x, y, z) \\ &= -m_G \mathbf{g}(x, y, z) + m_I \mathbf{g}(x, y, z) \\ &= (m_I - m_G) \mathbf{g}(x, y, z) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

となり、 $(x', y', z')$  の座標系においては局所的に重力が働いていないことになる。逆に、重力が働いていない座標系に仮想的に重力が働いているように見することもできる。等価原理によって、加速度と重力は区別できないため、一般相対性理論では同じものとして扱うことにする。この結論のもとで光の軌跡を考える。無重力のもとで加速度運動している観測者から見ると、光の軌道は相対的に曲がって見える。一方で、等価原理によってこの観測者は重力が働いている環境で静止していると見てもよい。すなわち、重力環境下では光の軌道が曲がるという事実が導かれる。この現象は、重力によって時空が曲がり、光や物体はその曲がった時空を真っ直ぐ（最短距離を）進むとして解釈される。この時空の曲がりや曲がった時空上を進む経路を計算するための理論こそが一般相対性理論である。

相対性理論では時間座標と空間座標を同等に扱うので、表記を以下のようにまとめて扱う。

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (2.12)$$

上付き数字はべき乗ではなく座標の番号を表す。添字をギリシャ文字で表した場合、 $x^\mu$  や  $x^\nu$  など、では  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  の値をとることを前提とし、添字をアルファベットで表した場合、 $x^i$  や  $x^j$  など、では  $i, j = 1, 2, 3$  と空間成分についてのみ考えていることを前提としている。特殊相対性理論では重力を考えていないので、ミンコフスキー時空は曲がっていない平坦である。2次元平面  $(x, y)$  を考えると、無限小離れた 2 点間の距離

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.13)$$

は任意の座標変換について不変である。座標の取り方を変えても距離が一定というのは筋が通っている。ミンコフスキー時空において任意のローレンツ変換について不変な距離は

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (2.14)$$

のようにして定義できる。この  $ds^2$  を線素と呼ぶ。線素は固有時の 2 乗の符号を反転したものと等しい。この線素を任意の座標変換について拡張していく。

ある点 P において 2 つの座標系  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  と  $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$  を考える。点 P における  $x^\mu$  成分と  $x^{\alpha'}$  成分の基底ベクトルをそれぞれ  $e_\mu(P)$ ,  $e_{\alpha'}(P)$  とする。以降、引数の P は省略するが、基底ベクトルや後に出てくる計量などはあくまでも局所的に定義されたものだという注意が必要である。基底ベクトルも互いの基底ベクトルで展開できるはずなので、

$$e_{\alpha'} = \sum_{\mu} \varepsilon_{\alpha'}^{\mu} e_{\mu}, \quad e_{\mu} = \sum_{\alpha'} \varepsilon_{\mu}^{\alpha'} e_{\alpha'} \quad (2.15)$$

とその係数  $\varepsilon_{\alpha'}^{\mu}$ ,  $\varepsilon_{\mu}^{\alpha'}$  を定義する。無限小離れた 2 点間のベクトル  $ds$  を考えると

$$ds = \sum_{\mu} dx^{\mu} e_{\mu} = \sum_{\alpha'} dx^{\alpha'} e_{\alpha'} = \sum_{\alpha'} \sum_{\mu} dx^{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'}^{\mu} e_{\mu} \quad (2.16)$$

とそれぞれ展開できる。この式より、

$$dx^{\mu} = \sum_{\alpha'} \varepsilon_{\alpha'}^{\mu} dx^{\alpha'} \implies \varepsilon_{\alpha'}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \implies e_{\alpha'} = \sum_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} e_{\mu} \quad (2.17)$$

がわかる。基底ベクトルは 2 つの座標系の変換行列で変換されるということである。線素  $ds^2$  は

$$ds^2 = ds \cdot ds = \left( \sum_{\mu} dx^{\mu} e_{\mu} \right) \cdot \left( \sum_{\nu} dx^{\nu} e_{\nu} \right) = \sum_{\mu, \nu} (e_{\mu} \cdot e_{\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.18)$$

と書けるので、

$$g_{\mu\nu} := e_{\mu} \cdot e_{\nu} \quad (2.19)$$

と定義すれば

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.20)$$

と書くことができる。この  $g_{\mu\nu}$  のことを計量と呼び、 $x^{\mu}$  の座標系で見たときの時空の曲がりの情報を持っている。計量は局所的に定義された量であり座標によって異なること、および座標系の取り方によっても異なることに注意が必要である。なお、一般相対性理論では式 (2.20) のように成分についての和を取る計算が非常に多いため、総和記号を省略して表記することが多い。線素の式だと

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (2.21)$$

と書けば式 (2.20) と同じ意味を表すものとする。1 つの項で上下に同じ文字が出て来る場合に、その文字の表す範囲について総和をとるという記法である。計量は数学的には (2 階の) テンソルと呼ばれる量であり、成分を行列のように表すことができる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

また、定義より  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  という対称性を持ち、独立な成分は最大で 10 個である。平坦な時空であるミンコフスキー時空の計量は

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

であり、この  $\eta_{\mu\nu}$  をミンコフスキー計量と呼ぶ。式 (2.19) より、ミンコフスキー計量は時空の互いに異なる成分同士の基底ベクトルが直交するというを表している。その意味でミンコフスキー時空は 4 次元時空におけるデカルト座標に対応する座標系の取り方と言える。計量  $g_{\mu\nu}$  がミンコフスキー計量  $\eta_{\mu\nu}$  に近ければ近いほど、重力の影響が小さくて平坦に近いことを表している。

アインシュタインは一般相対性原理と等価原理をもとにして、重力も考慮した上での時空の計量  $g_{\mu\nu}$  の従う方程式と、時空の計量が  $g_{\mu\nu}$  で与えられたときの光や物体の運動の軌道が従う方程式を導き出した。1 つ目がアインシュタイン方程式と呼ばれ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

という式で表される。 $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル、 $R$  はリッチスカラーと呼ばれる量であり、計量  $g_{\mu\nu}$  やその微分の組合せで構成される。 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれ、考えている時空における質量やエネルギー、運動量の分布を与える。 $c$  は光速、 $G$  は万有引力定数である。初期条件として物質の分布を表す  $T_{\mu\nu}$  を与えてアインシュタイン方程式を解くことで計量  $g_{\mu\nu}$  が計算できる。2 つ目の光や物体の運動の軌道が従う方程式を測地線の方程式といい、

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (2.25)$$

という式で表される。 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  はクリストッフエル記号と呼ばれ、これも計量  $g_{\mu\nu}$  から計算できる。測地線というのは時空上で常に接線が平行となるように進む経路である。3 次元空間であれば測地線は直線であるし、地球を完全な球体としたら赤道を進む経路は測地線である。したがって、アインシュタイン方程式を解いて計量が得られていれば測地線の方程式から運動の軌跡の方程式が得られる。この 2 つの方程式が一般相対性理論の基礎方程式である。

## 2.2 重力波の方程式

考えている時空がミンコフスキー時空からわずかにずれているものを考える。つまり、計量  $g_{\mu\nu}$  が

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (\epsilon \ll 1) \quad (2.26)$$

と表されるとする。さらに、簡単のために真空を考えると  $T_{\mu\nu} = 0$  となるので、アインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (2.27)$$

となる。この計量テンソルをアインシュタイン方程式 (2.27) に代入することで、 $h_{\mu\nu}$  の満たすべき方程式が得られる。リッチテンソルやスカラー曲率も計量から計算される量であることに注意し、 $\epsilon$  の 2 次以降の項を無視することにして、調和条件と呼ばれる条件を課すことで次の方程式が得られる。

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.28)$$

ここで、

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad h := \sum_{\rho,\sigma} \eta^{\rho\sigma} h_{\sigma\rho} \quad (2.29)$$

である。さて、座標の 0 成分が時間成分を表すことに注意すると、式 (2.28) が光速で伝播する波動の方程式を表していることがわかる。この式の意味するところは、一般相対性理論によると、平坦な時空の中を

時空の歪みが波として光速で伝播していくことができるということである。この波のことを重力波という。注意すべきは、まだ時空中を重力波が伝播することができるということを確認しただけで、重力波がどのようにして発生するかについては言及していないということである。

重力波の性質を調べるために、まず  $x_3$  方向（つまり  $z$  軸方向）に進む単色平面波の場合を考える。

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} e^{i(\omega x_0 + k x_3)}. \quad (2.30)$$

これに波動方程式を得る際に課した様々な条件を適応すると、最終的に

$$e_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

という形を得ることができる。これは、 $x_3$  方向に伝播する重力波の波の成分は  $x_1, x_2$  方向の成分しかないということを表している。つまり重力波は光などの電磁波と同じく横波である。 $e_{11}$  と  $e_{12}$  は重力波の偏光モードを表し、それぞれ + モードと  $\times$  モードと呼ばれる。改めて重力波を表す  $h_{\mu\nu}$  を

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

と各モードを明示的に書くことができる。

ここまででは簡単のために平坦な時空の上を伝播する平面波として重力波を考えたが、より一般の時空についても重力波を考えることはでき、その際は測地線を伝播する横波となることが導かれる。

### 2.3 重力波の生成と重力波の運ぶエネルギー

前項では重力波がどのように時空を伝播していくのかを考えた。ここでは重力波がどのように生成され、重力波を放射することによってどのくらいのエネルギーが運ばれるのかについて考えていく。

エネルギー運動量テンソルを含めたアインシュタイン方程式 (2.24) において、重力波を含んだ計量テンソル (式 (2.26)) を考え、 $h_{\mu\nu}$  の満たすべき方程式を考える。重力波源の作る重力場が十分弱く、重力波源内部の典型的な速度（連星系であれば連星を成す天体の速度など）が光速に比べて十分遅いという条件のもとでグリーン関数法などを用いて計算していくと

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{ij}(t-r) \quad (2.33)$$

という形が得られる。これを重力波の四重極公式という。ここまで、時間成分と空間成分を合わせて考えていたが、ここでは時間成分と空間成分をわけて考えている。添字  $i, j$  は 1, 2, 3 の値をとり、3次元空間のある次元成分を表すために用いられる。 $r$  は考えている重力波源（質量の分布）の中心からの距離である。そして  $I_{ij}$  は四重極モーメントと呼ばれ、

$$I_{ij}(t) := \int \rho(t, \mathbf{x}) \left( x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) d^3x \quad (2.34)$$

で定義される。 $\rho(t, \mathbf{x})$  は質量分布を表し、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。この式より、重力波の発生条件は質量分布を積分した四重極モーメントの時間 2 階微分が値を持つことであることがわかった。

重力波が運ぶエネルギーについて考えていく。重力波を放射することはアインシュタイン方程式 (2.24) において左辺が変化するということであり、この左辺の変化が右辺のエネルギー分布に及ぼす影

響を調べることによって、重力波が運ぶエネルギーを定義することができる。式 (2.33) で表される重力波のエネルギー放射率  $L_{\text{GW}}$  を計算すると

$$L_{\text{GW}} := \frac{dE_{\text{GW}}}{dt} = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle \quad (2.35)$$

という式が得られる。 $\langle \rangle$  は空間的な平均操作を表し、 $\ddot{I}_{jk}$  は  $I_{jk}$  の時間 3 階微分を表す。 $\ddot{I}_{jk}$  は仕事率の次元を持つ量であり、左辺も仕事率の次元であるから、 $c^5/G$  も仕事率の次元を持つ。これを  $L_0$  とすると、

$$L_0 = \frac{c^5}{G} \approx 3.6 \times 10^{59} \text{ erg/s} = 3.6 \times 10^{52} \text{ J/s} \quad (2.36)$$

となるが、これは非常に大きな値である。20 °C の水であれば 1 秒間に  $10^{47} \ell$  も沸騰させることができる。太陽の体積がおよそ  $10^{30} \ell$  であるからとてつもない量である。この  $L_0$  が分母に来ることからも、重力波が運ぶエネルギーを大きくするために必要なエネルギーがとてつもないオーダーであることがわかる。

人工的に重力波を放射させることを考えてみよう。例えば、質量  $M$  の物体を長さ  $2l$  の剛体棒の両端に取り付けたダンベルのような形のを角速度  $\omega$  で回転させることで理論上は重力波が放射される。この物体の運動エネルギー  $E_K$  は

$$E_K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M (l\omega)^2 = \frac{1}{2} M l^2 \omega^2 \quad (2.37)$$

であるから、この場合のエネルギー放射率は

$$L_{\text{GW}} = \frac{5(E_K \cdot (\omega/2\pi))^2}{L_0} = \frac{5}{16\pi^2} \frac{M^2 l^4 \omega^6}{L_0} \quad (2.38)$$

となる。現実的な範囲で  $M = 100 \text{ kg}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$  とすると、 $L_{\text{GW}} \approx 5.4 \times 10^{-34} \text{ J/s}$  であり非常に小さい。重力波を人工的に作ることは全くもって現実的ではないことがわかった。重力波を観測する残された道は、人工的なものよりもはるかに質量のスケールの大きい現象、つまりは天体現象から放射される重力波を観測することである。

## 2.4 重力波源

前項では重力波の生成には質量分布を積分した四重極モーメントの時間 2 階微分が値を持つことが必要であることを確認し、実際に観測できるほどのエネルギーを持った重力波は天体現象のような大きな質量スケールでの現象に限られるということを確認した。ここでは、実際に重力波を放射すると考えられている天体現象にはどのようなものがあるのかについて考えていく。

現在、重力波源として考えられている代表的な天体現象を以下に挙げる。

1. 中性子星連星やブラックホール連星の公転運動とその合体
2. 超新星爆発
3. 中性子星の非軸対称な自転運動

中性子星とは中性子を主成分とする星であり、10 km 程度の半径でありながら太陽と同程度の質量を持つ非常に高密度な天体である。ブラックホールは中性子星よりも高密度かつ大質量な天体であり、その強い重力によって光すらもブラックホールから脱出することはできない。一般相対性理論では質量によって時空が歪むのだが、局所的に非常に大きな質量が存在すると時空の歪みが発散してしまい時空の特異点となる。その特異点がブラックホールである。中性子星とブラックホールは体積が非常に小さい天体であるので、コンパクト星と呼ばれている。

重力波源の1つ目はコンパクト星の連星の公転運動から放射される重力波である。連星とは、2つの天体が互いの重力によって引かれ合いながら公転運動している状態を指す。連星の公転運動から放射される重力波を考えてみよう。それぞれの天体の質量を  $m_1, m_2$  とし、簡単のために軌道は円であるとする（実際には楕円軌道が許される）。ケプラーの第3法則より、円軌道の角速度  $\Omega$  の2乗は星間の距離  $a$  の3乗に反比例し

$$\frac{Gm_t}{a^3} = \Omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P_b}\right)^2, \quad (2.39)$$

$$m_t := m_1 + m_2 \quad (2.40)$$

である。 $P_b$  は公転周期を表す。円軌道の中心を原点とし、軌道面を  $z = 0$  の  $xy$  平面にとる。それぞれの星の座標  $(x_i, y_i)$  は位相を  $\Phi$ （一定）とすると、

$$x_1 = \frac{m_2}{m_t} a \cos(\Omega t + \Phi), \quad y_1 = \frac{m_2}{m_t} a \sin(\Omega t + \Phi), \quad (2.41)$$

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_t} a \cos(\Omega t + \Phi), \quad y_2 = -\frac{m_1}{m_t} a \sin(\Omega t + \Phi) \quad (2.42)$$

となる。これらを使って四重極モーメントを計算する。まず  $I_{11} = I_{xx}$  は、

$$\begin{aligned} I_{xx}(t) &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 \\ &= \frac{m_1 m_2^2}{m_t^2} a^2 \cos^2(\Omega t + \Phi) + \frac{m_2 m_1^2}{m_t^2} a^2 \cos^2(\Omega t + \Phi) \\ &= \frac{m_1 m_2}{2m_t} a^2 (1 + \cos(2\Omega t + 2\Phi)) \end{aligned} \quad (2.43)$$

となる。四重極モーメントの他の成分も同様に計算すると、

$$I_{yy}(t) = \frac{m_1 m_2}{2m_t} a^2 (1 - \cos(2\Omega t + 2\Phi)) \quad (2.44)$$

$$I_{xy}(t) = \frac{m_1 m_2}{2m_t} a^2 \sin(2\Omega t + 2\Phi) \quad (2.45)$$

$$I_{xz}(t) = I_{yz}(t) = I_{zz}(t) = 0 \quad (2.46)$$

が得られる。そしてこれらを時間2階微分すると、

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{xx}(t-r) &= -4\Omega^2 \frac{m_1 m_2}{2m_t} a^2 \cos(2\Omega(t-r) + 2\Phi) \\ &= -\frac{2Gm_1 m_2}{a} \cos(2\Omega(t-r) + 2\Phi), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\ddot{I}_{yy}(t-r) = -\ddot{I}_{xx}(t-r), \quad (2.48)$$

$$\ddot{I}_{xy}(t-r) = -\frac{2Gm_1 m_2}{a} \sin(2\Omega(t-r) + 2\Phi) \quad (2.49)$$

となる。これで式 (2.33) によって重力波の形を計算することができ、その結果を球座標  $(r, \theta, \varphi)$  で書くと、

$$h_+(t, r, \theta, \varphi) = -\frac{2}{ra} \frac{Gm_1}{c^2} \frac{Gm_2}{c^2} \cos(2\Omega(t-r) - 2\varphi + 2\Phi) (\cos^2 \theta + 1), \quad (2.50)$$

$$h_\times(t, r, \theta, \varphi) = -\frac{2}{ra} \frac{Gm_1}{c^2} \frac{Gm_2}{c^2} \sin(2\Omega(t-r) - 2\varphi + 2\Phi) 2 \cos \theta \quad (2.51)$$

となる。 $h_+$  の振幅は軌道面と垂直方向 ( $\theta = 0$ ) で最大となり、軌道面と平行方向 ( $\theta = \pi/2$ ) で最小となる。 $h_\times$  の振幅は軌道面と平行方向で 0 となる。振幅が最大となる方向で位相  $\varphi = \Phi = 0$  とすると

$$h_+(t, r) = -\frac{4}{ra} \frac{Gm_1}{c^2} \frac{Gm_2}{c^2} \cos(2\Omega(t - r)), \quad (2.52)$$

$$h_\times(t, r) = -\frac{4}{ra} \frac{Gm_1}{c^2} \frac{Gm_2}{c^2} \sin(2\Omega(t - r)) \quad (2.53)$$

となる。また、前項で議論したように重力波を放射するということはエネルギーを失っていくということである。公転運動している連星系がエネルギーを失っていくとその分回転半径  $a$  が短くなっていく、また半径が短くなるとケプラーの法則 (2.39) に従って角速度  $\Omega$  が大きくなっていく。つまり、式 (2.52), (2.53) は時間とともに振動数と振幅が上がっていくような波を表している。この波形を鳥のさえずりになぞらえてチャープ波形 (chirp signal) という。重力波の周波数  $f = \Omega/\pi$  について、その時間微分は

$$\frac{df}{dt} = \frac{96\pi^{\frac{8}{3}} G^{\frac{5}{3}}}{5 c^5} f^{\frac{11}{5}} m_1 m_2 m_t^{-\frac{1}{3}} \quad (2.54)$$

となるのが計算できる。この式から、観測した重力波の  $\dot{f}/f^{\frac{11}{5}}$  を計算することで、 $m_1 m_2 m_t^{-\frac{1}{3}}$  という連星系をなす天体の質量の組み合わせによって決まる量が求められることがわかる。この量に質量の次元を持たせたものをチャープ質量 (chirp mass) という。

$$m_{\text{chirp}} := \left( m_1 m_2 m_t^{-\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}. \quad (2.55)$$

また、 $h_+$  と  $h_\times$  の振幅の比を調べることで、観測者と軌道面のなす角  $\theta$  を求めることができる。 $\theta$  が求まったら、あとは実際の振幅を調べることで観測者と軌道中心との距離  $r$  を計算することができる。このように連星系からの重力波を直接観測することで、連星系の情報をいくつか得ることができる。一般の楕円軌道について考えると離心率  $e$  が式の中に出てくるようになるが、ほぼ同様な結果が得られる。

コンパクト連星は公転運動によって重力波を放射しながら軌道半径が小さくなっていくことがわかった。軌道半径が小さくなっていくということは永遠に公転運動を続けられるというわけではなく、いつかは半径が 0 になり連星を作っていた 2 つの天体が衝突することになる。実際には剛体的な衝突というよりは合体と呼ぶ方がふさわしい。合体後は 2 つの星の質量が 1 つになり、新たな天体が作られる。新たな天体はその質量によって中性子星となるかブラックホールとなるかが決まる。というのも、中性子星のとりえる質量の限界は太陽の質量の 2 倍ほどと理論的に制限がつけられるからである。したがって、考えられる可能性は

1. 中性子星連星が合体し中性子星が形成される
2. 中性子星連星が合体しブラックホールが形成される
3. 中性子星とブラックホールの連星が合体しブラックホールが形成される
4. ブラックホール連星が合体しブラックホールが形成される

の 4 通りである。公転運動については速度も重力場も大きくないためニュートン近似で計算していたが、この合体現象については速度も重力場も大きくなるためにニュートン近似は適応できず、四重極公式も使用できない。加えて衝撃波も含めた流体力学的な現象も考慮に入れなくてはならないため、解析的に計算することは非常に困難である。現在は数値計算によってシミュレーションが行われており、その結果を観測される重力波と比較することによって検証を行うことを想定している。また、中性子星連星は多く見つかっている一方で、ブラックホール連星は電波では観測できないため、重力波の検出がなされるまでは未観測の理論上の存在であった。

理論研究によってブラックホール唯一性定理という定理が得られている。これはどんな初期状態から始まったブラックホールも時間発展したのちに Kerr-Newman ブラックホールという形に収束するというものである。これは電荷を持って自転しているブラックホールを表す。コンパクト連星の合体によってブラックホールが形成される場合も合体直後から減衰振動を行いながら、定常状態に収束する。この減衰振動の振動数はブラックホール固有のものなので、減衰する固有振動ということで準固有振動と呼ばれる。また、コンパクト連星の合体によって中性子星ができる場合は、できた直後は非軸対称な中性子星となることが予想されるため、その自転によって重力波を放射することになると考えられている。

ここまでコンパクト連星について考えてきた。残りの2つについても簡単に見ていくことにする。超新星爆発は星の進化の最終段階に起こる爆発であり、質量分布の瞬間的な変化を引き起こすため、重力波を放射することは想像に難くない。式 (2.33) に示したように、重力波は四重極モーメントの時間2階微分に比例するため、変化の時間スケールが短い方がより強い重力波が放射されることになる。実際、超新星爆発によって放射される重力波についてのシミュレーションは多く研究されており、爆発の瞬間に強いピークを持つ重力波が予想されている。このような短い時間スケールで強いピークを持つ重力波を総称してバースト重力波と呼ぶ。先に説明したブラックホール連星の合体の際に放射される重力波も非常に強いピークを持つことが予想されているので、バースト重力波の1つとされている。

最後に示した中性子星の非軸対称な自転運動というのは、地球のように凹凸のある中性子星を考えればよく、自転の非軸対称性が四重極モーメントの2階微分に値を持たせることになる。放射される重力波の周期は中性子星の自転周期と同じである。この場合も重力波の放射によってエネルギーを失っていくことで自転周期が変化していくが、その割合は小さくなく、長いスケールでゆっくり振動数の変化していく重力波が予想されている。この重力波を連続重力波と呼ぶ。

## 2.5 重力波の検出

ここまで重力波は時空の歪みが波として伝播していく現象であり、質量分布の四重極モーメントの時間2階微分に応じて発生し、エネルギーを運びながら伝播していくことを見てきた。ここでは、その重力波の検出はどのようにして実現できるのかを考えていく。

重力波というのは時空の歪みの時間変化であり、時空の歪みとは重力の勾配であるわけだから、直感的には重力の変化を調べればよいように思える。しかし、一般相対性理論によると等価原理という原理によってあらゆる点は適切な座標変換によって慣性系として扱うことができるので、局所的な観測点で大域的な重力波の影響を調べることは不可能である。重力波を検出する唯一の方針は2点間の重力の差、つまり時空の歪みの違いを調べるしかない。

$z$  方向に伝播する単色平面波型の重力波を考える。簡単のため、 $h_x = 0$  とし、 $h_+$  モードだけで考え、重力波の角振動数を  $\omega_g$  とし、位相を 0 とすると、

$$h_+(t, z) = h_+ \cos(\omega_g(t - z)) \quad (2.56)$$

となる。ここで、振幅  $h_+$  は式 (2.26) における  $\epsilon$  を含んだものとする。つまり、 $h_+ \ll 1$  である。式 (2.26) と式 (2.32) より、この場合の計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_+ \cos(\omega_g(t - z)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - h_+ \cos(\omega_g(t - z)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$



となる。そもそも計量テンソルとは、時空上の無限小だけ離れた 2 点 A, B 間の距離  $ds$  の 2 乗を

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (2.58)$$

と、各座標軸の無限小要素の 2 次までで書いたときの係数となっている。つまり、このときの線素  $ds^2$  は

$$ds^2 = -dt^2 + \{1 + h_+ \cos(\omega_g(t - z))\}dx^2 + \{1 - h_+ \cos(\omega_g(t - z))\}dy^2 + dz^2 \quad (2.59)$$

と表される。 $g_{\mu\nu}$  が一定、すなわち重力波が存在していないと、2 点間の座標の差  $\Delta x_i = \text{const.}$  である。

点 A を原点  $(0, 0, 0)$  にとり、A を中心とした半径  $r$  の球面上  $(x, y, z) = (r, \theta, \varphi)$  に点 B をとると、

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (2.60)$$

であり、 $\theta, \varphi$  は固定として  $r$  についてのみ  $R_0 + dr$  だけ微小変化を考えると、

$$dx = \sin \theta \cos \varphi dr, \quad dy = \sin \theta \sin \varphi dr, \quad dz = \cos \theta dr \quad (2.61)$$

となる。この  $(r, \theta, \varphi)$  において  $z$  方向に伝播する重力波が存在するときの線素  $ds^2$  を表すと、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 [1 + h_+ \cos(\omega_g(t - r \cos \theta)) \sin^2 \theta \cos 2\varphi] \quad (2.62)$$

が得られる。 $\theta = \pi/2$  のとき、すなわち AB が重力波の進行方向に対して垂直であるとき、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 (1 + h_+ \cos(\omega_g t) \cos 2\varphi) \quad (2.63)$$

となり、2 点間の距離は重力波の角振動数にしたがって振動する。一方で、AB が重力波の進行方向に平行 ( $\theta = 0$ ) なときは

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 \quad (2.64)$$

であるから、AB 間の距離は時間に依存せず一定である。つまり重力波は進行方向に平行な方向には影響を及ぼさない。ひとまず重力波が垂直に入射してくる場合を考える。

AB 間の距離の測定には光を用いる。A から B に光を送り、B で光を反射させて A に送り返す。 $R_0$  が光の波長よりも十分短く、幾何光学近似が成り立つとすれば、この往復にかかった時間を  $\Delta t$  とすると、 $R_0 = c\Delta t/2$  であるから、この  $\Delta t$  を測定すれば距離が求まる。そして、相対性理論において光は  $ds^2 = 0$  の軌道を進むので、

$$\begin{aligned} 0 &= -c^2 dt^2 + dr^2 (1 + h_+ \cos(\omega_g t) \cos 2\varphi) \\ dr &= c dt (1 + h_+ \cos(\omega_g t) \cos 2\varphi)^{-\frac{1}{2}} \\ dr &\simeq c dt \left( 1 - \frac{h_+}{2} \cos(\omega_g t) \cos 2\varphi \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

となる。時刻  $t = t_0$  に発射した光が点 B に到達する時刻を  $t_0 + \Delta t(\varphi)$  とすると、

$$\begin{aligned}
\int_0^{R_0} dr &= c \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t(\varphi)} \left( 1 - \frac{h_+}{2} \cos(\omega_g t) \cos 2\varphi \right) \\
\frac{R_0}{c} &= \Delta t(\varphi) - \frac{h_+}{2\omega_g} (\sin(\omega_g t_0 + \omega_g \Delta t(\varphi)) - \sin(\omega_g t_0)) \cos 2\varphi \\
&= \Delta t(\varphi) - \frac{h_+ \Delta t(\varphi)}{2} \frac{\sin(\omega_g t_0 + \omega_g \Delta t(\varphi)) - \sin(\omega_g t_0)}{\omega_g \Delta t(\varphi)} \cos 2\varphi \\
&\simeq \Delta t(\varphi) - \frac{h_+ \Delta t(\varphi)}{2} \cos(\omega_g t_0) \cos 2\varphi \\
c\Delta t(\varphi) &= R_0 \left( 1 - \frac{h_+}{2} \cos(\omega_g t_0) \cos 2\varphi \right)^{-1} \\
&\simeq R_0 \left( 1 + \frac{h_+}{2} \cos(\omega_g t_0) \cos 2\varphi \right) \tag{2.66}
\end{aligned}$$

が得られる。したがって、光が往復するまでに進む距離  $R(\varphi)$  は

$$R(\varphi) = 2c\Delta t(\varphi) = 2R_0 \left( 1 + \frac{h_+}{2} \cos(\omega_g t_0) \cos 2\varphi \right) \tag{2.67}$$

となる。この式の意味するところは、重力波の進行方向に垂直な面における 2 点 A(0, 0, 0) と B( $R_0, \pi/2, \varphi$ ) の間を光が往復するときに進む距離は、 $\varphi$  によって変わるということである。

重力波の初検出を果たした LIGO を始め、現在主流となっている重力波望遠鏡はレーザー干渉計型のものである。最も基本的なマイケルソン干渉計の概念図を図 1 に示す。レーザーをビームスプリッターによって直交する 2 つの方向の光路に分離して往復させ、再びビームスプリッターで干渉させる装置であり、2 本の光路で位相差が生じると、干渉光の強度が変化するという装置である。式 (2.67) にあるように、重力波が入射すると、その平面内の角度  $\varphi$  によって光路長が動的に変化し、レーザー干渉計のように  $\varphi$  が  $90^\circ$  異なる方向について、光路長の差が最大となる。重力波の時間変動が光の往復に比べて十分遅いとして、時刻  $t_0$  に入射した重力波によって生じる直交する 2 方向での光路長の差  $\Delta R_{12}$  は

$$\begin{aligned}
\Delta R_{12} &= R(0^\circ) - R(90^\circ) \\
&= 2R_0 \left( 1 + \frac{h_+}{2} \cos(\omega_g t_0) \right) - 2R_0 \left( 1 - \frac{h_+}{2} \cos(\omega_g t_0) \right) \\
&= 2R_0 h_+ \cos(\omega_g t_0) \tag{2.68}
\end{aligned}$$

となる。レーザーの波長を  $\lambda$  とすると、この光路長のズレによって、ビームスプリッターに戻ってきたところでの位相差  $\Delta\Phi$  は

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta R_{12} = \frac{4\pi R_0}{\lambda} h_+ \cos(\omega_g t_0) \tag{2.69}$$

となることがわかる。マイケルソン干渉計では、この位相差  $\Delta\Phi$  の変化を干渉光の強度変化に変化し、それを光検出器で読み取る。光検出器の光電流  $I_{PD}$  がレーザー干渉計の出力であり、位相差  $\Delta$  があるときのその値は

$$I_{PD} = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(\Delta\Phi - \Phi)) \tag{2.70}$$

であるので、初期位相差  $\Phi_0$  を  $\pi/2$  になるように設定すると、重力波による光電流の変化  $\Delta I_{PD}$  は

$$\Delta I_{PD} = \frac{I_0}{2} \sin(\Delta\Phi) \approx \frac{I_0}{2} \Delta\Phi = \frac{2\pi R_0 I_0}{\lambda} h_+ \cos(\omega_g t_0) \tag{2.71}$$

表 1: レーザー干渉計における主なノイズ源 [9]。

種類	主なノイズ源
光雑音	光の散乱雑音 (ショットノイズ), 周波数雑音, ビームジッター雑音
熱雑音	振り子や鏡, ワイヤの弾性振動
外来振動	常時微動, 地震, 人工雑音
その他	光路の屈折率揺らぎ, 量子論的不確定性, 電磁波, 宇宙線

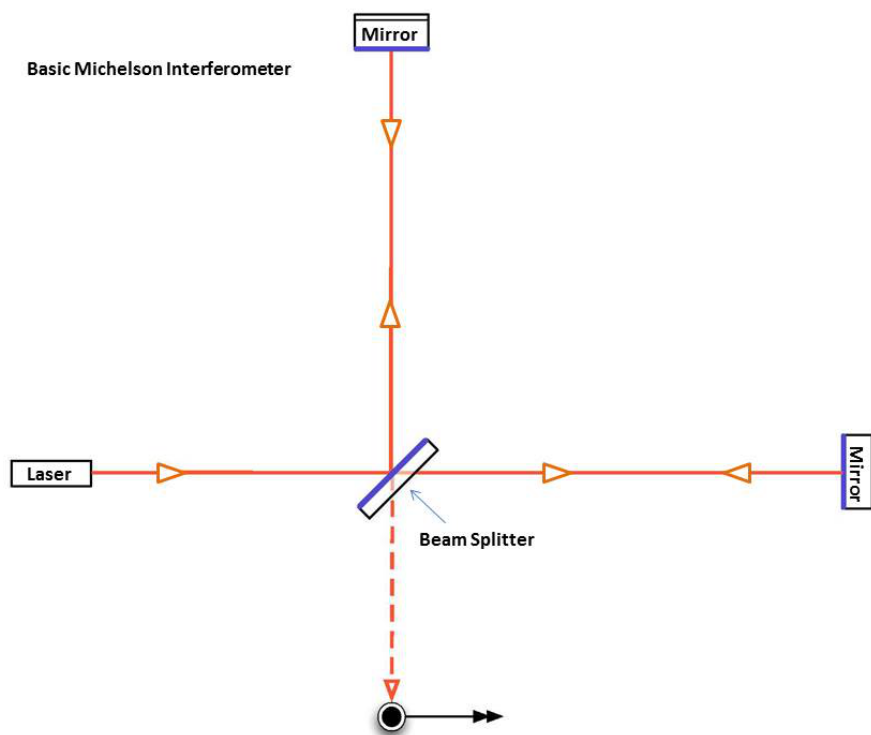


図 1: レーザー干渉計型重力波検出器の概念図 (LIGO ホームページ (<https://www.ligo.caltech.edu/>) より借用)。

となる。この式からわかるように、レーザー干渉計の出力は重力波の振幅  $h_+$  に比例する。また、干渉計の腕の長さ  $R_0$  にも比例することがわかるので、干渉計の感度は腕の長さに比例する。現在建設されている干渉計は、感度を上げるために光を多重に往復させるファブリー-ペロー干渉計を用いている。

レーザー干渉計におけるノイズ源をまとめたものを表 1 に示す [9]。図 2 に示したグラフは LIGO の最終的なノイズの振幅スペクトルの目標値である [10]。検出器に入射した重力波の周波数成分がこの曲線を上回っていれば検出可能ということを表すので、ノイズのスペクトル曲線のことを感度曲線ともいう。最も感度の良い帯域はおよそ  $10^{-23}$  のオーダーであることがわかる。地球と太陽との距離 (約  $1.5 \times 10^8$  km) を水素原子よりも小さい  $10^{-12}$  m だけ歪ませる程度の大きさの重力波が検出可能だということである。

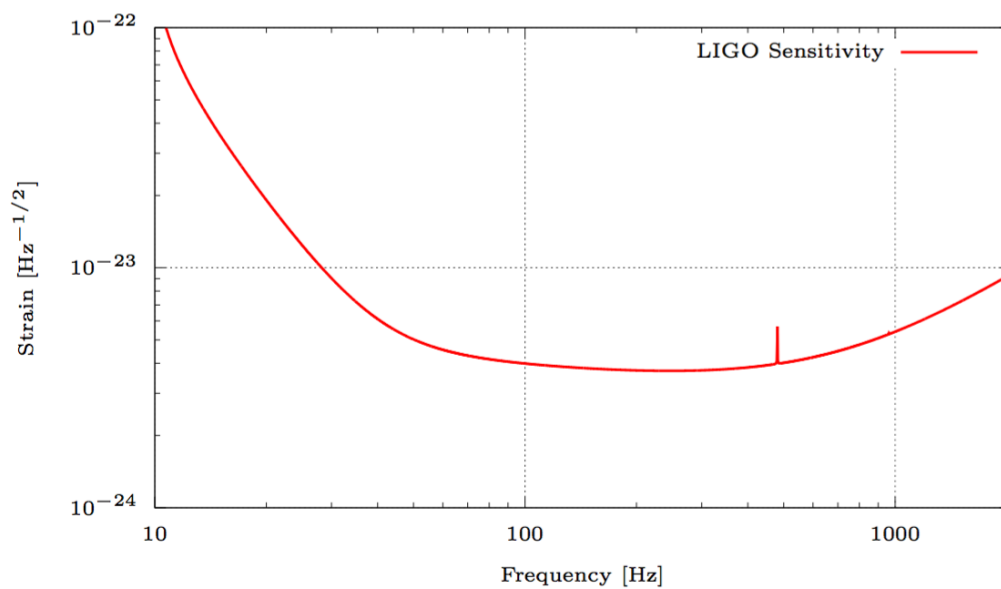


図 2: LIGO の周波数感度曲線

### 3 重力波データ解析

前節で重力波についての理論的な背景を説明し、その検出の原理について述べた。また、重力波の振幅が非常に小さいことから、検出器の出力にはノイズの寄与が大きくなることもわかった。本節では、このような信号と比べてノイズの成分が大きいようなデータの扱いについて述べ、どのようにして重力波の観測データから物理的考察を行うかについて述べる。まずは、検出器のノイズをモデル化して扱うために確率過程について定義し、その確率過程でモデル化したノイズの代表的な例であるガウスノイズについてその性質を述べる。その後、ガウスノイズにおいて最適な信号検出手法とされているマッチドフィルタ解析について述べる。また、マッチドフィルタ解析を用いてパラメータの事後確率を推定するための1つの方法としてマルコフ連鎖モンテカルロ法について、その定義をまとめていく。最後に、波形の予測が困難であり、マッチドフィルタ解析を適用できない場合についての検出手法である Excess Power Method について述べる。

#### 3.1 確率過程とガウスノイズ

確率過程とは確率変数の列である。検出器のノイズは確率過程を時系列  $x(t)$  で表したものとしてモデル化できる。各時刻におけるノイズの正確な値を事前にはできないが、統計的な性質を決めることは可能である。ここでは確率過程でモデル化したノイズの統計的な性質に関する内容を記載する。

##### 3.1.1 確率過程の定義とパワースペクトル密度

ノイズ  $x(t)$  が各時刻  $t$  において区間  $[x, x + \Delta x)$  の値をとる確率を  $p_x(x, t)\Delta x$  と表すとき、 $p_x(x, t)$  を時刻  $t$  におけるノイズ  $x(t)$  の確率密度関数という。時刻  $t$  における  $x(t)$  の期待値  $\langle x(t) \rangle$  はアンサンブル平均

$$\langle x(t) \rangle := \int xp_x(x, t)dx \quad (3.1)$$

と定義される。ランダム過程の統計的性質、つまり確率密度関数が時間によって変化しないとき、その過程を特に定常過程と呼ぶ。定常過程では確率密度関数が時間に依存しないので単に  $p_x(x)$  と書くことができる。また、アンサンブル平均と長時間平均が等価になる。これをエルゴードの定理という。したがって、定常過程  $x(t)$  の期待値は時刻によらず

$$\langle x \rangle = \int xp_x(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \quad (3.2)$$

と書くことができる。

ある信号  $x(t)$  を考える。簡単のため、 $\langle x \rangle = 0$  とする。この信号のパワー  $S_x$  を  $x(t)^2$  の時間平均として定義する。すなわち、

$$S_x := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt \quad (3.3)$$

である。 $x(t)$  を定常過程だとすると  $x(t)^2$  も定常過程なので、エルゴードの定理が成り立つ。さらに、時間領域で矩形窓をかけた信号

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.4)$$

を定義しておく、 $x(t)^2$  の平均は

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}_T(f)|^2 df \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{\infty} |\tilde{x}_T(f)|^2 df\end{aligned}\quad (3.5)$$

となる。ここで、 $\tilde{x}_T(f)$  は  $x_T(t)$  のフーリエ変換であり、パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(f)|^2 df \quad (3.6)$$

を使った。なお、フーリエ変換の定義と逆フーリエ変換は

$$\tilde{x}(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (3.7)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f) e^{i2\pi ft} df \quad (3.8)$$

と表される。信号の片側パワースペクトル密度  $S_x(f)$  は

$$S_x(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |\tilde{x}_T(f)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 \quad (3.9)$$

と定義され、

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^{\infty} S_x(f) df \quad (3.10)$$

が成り立つ (付録 A.2 も参照)。パワースペクトル密度という名前は、スペクトル領域 (周波数領域) で積分することでパワーが求まることを表している。信号  $x(t)$  の自己相関関数

$$R_x(t, \tau) := \langle x(t+\tau)x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t+\tau)x(t) \quad (3.11)$$

は  $x(t)$  が定常過程であれば  $t$  によらず、片側パワースペクトル密度と

$$S_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} = 2\tilde{R}_x(f) \quad (3.12)$$

という関係を持っている。また、この関係を使うと、パワースペクトル密度に関する重要な式

$$\langle \tilde{x}^*(f') \tilde{x}(f) \rangle = \frac{1}{2} S_x(f) \delta(f - f') \quad (3.13)$$

を示すことができる。 $\delta(f)$  はディラックのデルタ関数である。

## 3.1.2 ガウスノイズ

時間長  $T$  のノイズ時系列  $x(t)$  を考える。このノイズを間隔  $\Delta t$  で標本化して  $N$  点のサンプル  $x_j = x(j\Delta t)$  ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ) を得るとする。 $x_j$  の結合確率密度が

$$p_x(\{x_j\}) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{j=0}^{N-1} (x_j - \mu_x)^2 \right\} \quad (3.14)$$

という形で表すことができるとき、このノイズをガウスノイズという。ここで  $\mu_x$  と  $\sigma_x$  はノイズ  $x(t)$  の期待値と標準偏差であり、

$$\mu_x := \langle x \rangle, \quad \sigma_x := \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (3.15)$$

と定義される。このように標本化した信号  $x_j$  については  $T$  を固定したまま  $\Delta t \rightarrow 0$  とすると連続極限を考えることができ、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \Delta t = \int_0^T x(t)^2 dt \simeq \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(f)|^2 df \quad (3.16)$$

となる。式 (3.14) で表されるガウスノイズは異なる時刻の各点が互いに独立である。つまり、自己相関関数  $R_x(\tau)$  について

$$R_k := R_x(k\Delta t) = \langle x_{j+k} x_j \rangle = \sigma_x^2 \delta_{k,0} \quad (3.17)$$

が成り立つということである。 $\delta_{jk}$  はクロネッカーのデルタである。したがって、そのパワースペクトル密度は

$$\begin{aligned} S_x(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2 \sum_{k=0}^{N-1} R_k e^{-i2\pi f k \Delta t} \Delta t \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2\sigma_x^2 \Delta t \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$=: S_x \quad (3.19)$$

と、周波数によらず一定になる。このようにパワースペクトル密度が周波数によらないノイズのことをホワイトノイズという。

パワースペクトル密度が定数であることから、確率密度関数の連続極限を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \right\} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \Delta t \right\} \\ &\simeq \exp \left\{ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{S_x} df \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 4 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{S_x} df \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

となることを使って、

$$p_x[x(t)] \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 4 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{x}(f)|^2}{S_x} df \right\} \quad (3.21)$$

となる。

パワースペクトル密度が周波数に応じて異なる値をとるようなノイズを、ホワイトノイズに対してカラーノイズという。カラーノイズ  $y(t)$  はホワイトノイズ  $x(t)$  に対する線形変換

$$y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} K(t-t')x(t')dt' \quad (3.22)$$

で作ることができる。この両辺をフーリエ変換すると

$$\tilde{y}(f) = \tilde{K}(f)\tilde{x}(f) \quad (3.23)$$

となるので、 $y(t)$  のパワースペクトル密度  $S_y(f)$  は式 (3.13) より、

$$S_y(f) = |\tilde{K}(f)|^2 S_x \quad (3.24)$$

と書ける。この  $K(t)$  を核という。これを式 (3.21) に入れることで、

$$p_y[y(t)] \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 4 \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{y}(f)|^2}{S_y(f)} df \right\} \quad (3.25)$$

が得られる。この式を拡張して、2つの信号  $a(t)$ ,  $b(t)$  に関するノイズの重み付き内積  $(a, b)$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} (a, b) &:= 4 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S(f)} df \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f)}{S(|f|)} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f) + \tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)}{S(|f|)} df. \end{aligned} \quad (3.26)$$

$S(f)$  はノイズのパワースペクトル密度であり、最後の等式では  $a(t)$  と  $b(t)$  の実数性から成り立つフーリエ変換の性質  $\tilde{a}^*(-f) = \tilde{a}(f)$  を使った。この内積を使うと、定常ガウス過程  $x(t)$  の確率密度関数は

$$p_x[x(t)] \propto e^{-(x,x)/2} \quad (3.27)$$

と書ける。



## 3.2 マッチドフィルタ解析

### 3.2.1 最適検出統計量とマッチドフィルタの定義

ノイズの統計的性質が知られていて、検出したい信号の正確な形もわかっているとき、最適な検出統計量を定義することができる。まず、検出器の取得した生のデータを  $s(t)$ 、生データに含まれるノイズ成分を  $n(t)$ 、検出したい重力波信号を  $h(t)$  とする。重力波を検出するというのは次の2つの仮説を検証するという事に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \text{帰無仮説 } \mathcal{H}_0 &: s(t) = n(t) \\ \text{対立仮説 } \mathcal{H}_1 &: s(t) = n(t) + h(t) \end{aligned}$$

これはオッズ比  $\mathcal{O}(\mathcal{H}_1 | s) = \Pr(\mathcal{H}_1 | s) / \Pr(\mathcal{H}_0 | s)$  を計算することで検証可能である。データ  $s(t)$  が与えられたときに対立仮説  $\mathcal{H}_1$  が真である確率と帰無仮説  $\mathcal{H}_0$  が真である確率の比であるオッズ比が事前に決めておいた閾値を超えるかどうかで判断すれば良い。

ベイズの定理より、条件付き確率  $\Pr(\mathcal{B} | \mathcal{A})$  は

$$\Pr(\mathcal{B} | \mathcal{A}) = \frac{\Pr(\mathcal{A} | \mathcal{B}) \Pr(\mathcal{B})}{\Pr(\mathcal{A})} \quad (3.28)$$

と表すことができる。これは確率の完全性関係

$$\Pr(\mathcal{A}) = \Pr(\mathcal{A} | \mathcal{B}) \Pr(\mathcal{B}) + \Pr(\mathcal{A} | \neg \mathcal{B}) \Pr(\neg \mathcal{B}) \quad (3.29)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{B} | \mathcal{A}) &= \frac{\Pr(\mathcal{A} | \mathcal{B})}{\Pr(\mathcal{A} | \mathcal{B}) \Pr(\mathcal{B}) + \Pr(\mathcal{A} | \neg \mathcal{B}) \Pr(\neg \mathcal{B})} \Pr(\mathcal{B}) \\ &= \frac{\Lambda(\mathcal{B} | \mathcal{A})}{\Lambda(\mathcal{B} | \mathcal{A}) + \frac{\Pr(\neg \mathcal{B})}{\Pr(\mathcal{B})}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

と書くことができる。ここで、

$$\Lambda(\mathcal{B} | \mathcal{A}) := \frac{\Pr(\mathcal{A} | \mathcal{B})}{\Pr(\mathcal{A} | \neg \mathcal{B})} \quad (3.31)$$

は尤度比 (likelihood ratio) と呼ばれる量である。これを使うとオッズ比は、

$$\mathcal{O}(\mathcal{B} | \mathcal{A}) := \frac{\Pr(\mathcal{B} | \mathcal{A})}{\Pr(\neg \mathcal{B} | \mathcal{A})} = \mathcal{O}(\mathcal{B}) \Lambda(\mathcal{B} | \mathcal{A}) \quad (3.32)$$

$$\mathcal{O}(\mathcal{B}) := \frac{\Pr(\mathcal{B})}{\Pr(\neg \mathcal{B})} \quad (3.33)$$

といった書き方に直すことができる。

改めて検出についての問題設定としては、データが与えられたときに対立仮説  $\mathcal{H}_1$  が真である確率と帰無仮説  $\mathcal{H}_0$  が真である確率のオッズ比が閾値を超えるかどうかであった。これは式 (3.32) より、事前オッズ比  $\mathcal{O}(\mathcal{H}_1)$  と尤度比

$$\Lambda(\mathcal{H}_1 | s) = \frac{p(s | \mathcal{H}_1)}{p(s | \mathcal{H}_0)} \quad (3.34)$$

に比例する。なお、ここからは連続量での信号に関する確率の議論なので確率密度関数に置き換えている。事前オッズ比はデータに依存しないため、データによってオッズ比が閾値を超えるかどうかは、尤度比  $\Lambda(\mathcal{H}_1 | s)$  が閾値を超えるかどうかにかき換えることができる。

さらに、ノイズがガウスノイズであると仮定する。すると、帰無仮説  $\mathcal{H}_0$  の下での確率密度は計算でき、

$$p(s | \mathcal{H}_0) = p_n[s(t)] \propto e^{-(s,s)/2} \quad (3.35)$$

である。ここで、 $n(t)$  はデータに含まれるノイズであり、 $(s, s)$  は既知である  $n(t)$  のパワースペクトル密度  $S_n(f)$  の下で、データ  $s(t)$  の内積 (3.26) を計算することを表している。また、対立仮説  $\mathcal{H}_1$  の下では、ノイズを  $n(t) = s(t) - h(t)$  と書けるから、

$$p(s | \mathcal{H}_1) = p_n[s(t) - h(t)] \propto e^{-(s-h, s-h)/2} \quad (3.36)$$

となる。したがって、

$$\Lambda(\mathcal{H}_1 | s) = \frac{e^{-(s-h, s-h)/2}}{e^{-(s,s)/2}} = e^{-\{(s,s) - 2(s,h) + (h,h) - (s,s)\}/2} = e^{(s,h)} e^{-(h,h)/2} \quad (3.37)$$

である。内積  $(h, h)$  は既知の重力波信号の波形と既知のノイズのパワースペクトル密度で計算できる量であるから、尤度比  $\Lambda(\mathcal{H}_1 | s)$  は内積  $(s, h)$  を通してのみデータ  $s(t)$  に依存することになる。そして尤度比はこの内積について単調増加なので、つまりはオッズ比  $\mathcal{O}(\mathcal{H}_1 | s)$  もこの内積について単調増加である。以上を踏まえて、内積

$$(s, h) = 4 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\tilde{s}(f) \tilde{h}^*(f)}{S_n(f)} df \quad (3.38)$$

が最適な検出統計量として使え、この処理をマッチドフィルタという。

$s(t)$  がノイズだけで重力波信号が含まれていない場合の  $(s, h)$  の振る舞い、すなわち確率変数  $x = (n, h)$  の統計的性質を調べる。ノイズ  $n(t)$  は平均 0 のガウスノイズであるとする。まず期待値  $\langle x \rangle$  は

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \left\langle 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{n}(f) \tilde{h}^*(f)}{S(|f|)} df \right\rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\langle \tilde{n}(f) \rangle \tilde{h}^*(f)}{S(|f|)} df \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

となる。分散  $\langle x^2 \rangle$  は

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \left\langle \left( 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{n}(f) \tilde{h}^*(f)}{S(|f|)} df \right) \left( 2 \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{n}(f') \tilde{h}(f')}{S(|f'|)} df' \right) \right\rangle \\ &= 4 \int_{-\infty}^\infty df \int_{-\infty}^\infty df' \frac{\langle \tilde{n}(f) \tilde{n}^*(f') \rangle \tilde{h}^*(f) \tilde{h}(f')}{S(|f|) S(|f'|)} \\ &= 2 \int_{-\infty}^\infty df \int_{-\infty}^\infty df' \frac{S(|f|) \delta(f - f') \tilde{h}^*(f) \tilde{h}(f')}{S(|f|) S(|f'|)} \\ &= 2 \int_{-\infty}^\infty df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S(|f|)} \\ &= (h, h) \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる。そして、 $n(t)$  をガウスノイズと仮定しているので、 $m \geq 3$  については  $\langle x^m \rangle = 0$  である。以上より、データ  $s(t)$  にノイズしか含まれていない場合のマッチドフィルタ  $(s, h)$  は平均 0 で分散  $(h, h)$  のガウス分布に従う。「 $5\sigma$  以上」というのはつまり  $|(s, h)| \geq 5\sqrt{(h, h)}$  であつたということを意味する。

データに重力波信号  $Ah(t)$  が含まれていた場合 ( $s(t) = Ah(t) + n(t)$ ),  $x = (s, h)$  について調べると,

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle (n, h) \rangle + A(h, h) \\ &= A\sigma^2\end{aligned}\quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \left\langle [(n, h) + A(h, h)]^2 \right\rangle \\ &= \langle (n, h)^2 \rangle + A(h, h)\langle (n, h) \rangle + A^2(h, h)^2 \\ &= \sigma^2 + A^2\sigma^4\end{aligned}\quad (3.42)$$

となり,  $x = (s, h)$  は平均  $A\sigma^2$ , 分散  $\sigma^2$  のガウス分布に従うことがわかる。  $\rho = x/\sigma$  のことを観測データ  $s$  における重力波信号  $h$  についての Signal-to-noise ratio (SNR) と呼ぶ。ガウスノイズだけであれば,  $\rho$  は平均 0, 分散 1 のガウス分布に従う。また, 重力波信号  $Ah(t)$  が含まれているときの  $\rho$  の期待値

$$\langle \rho \rangle = A\sigma = A(h, h)^{1/2} = (Ah, Ah)^{1/2}\quad (3.43)$$

のことを (characteristic) SNR と呼ぶこともある。

### 3.2.2 マッチドフィルタによるパラメータ推定

例えば, コンパクト連星から放射される重力波の振動数の時間発展は, その連星系をなす 2 つの天体の質量の組み合わせによって決まるチャープ質量 (2.55) によって特徴づけられる。すなわち, 連星系をなす天体の質量の組み合わせによって, そこから放射される重力波の振動数の時間発展は異なるということである。マッチドフィルタは完全な波形が必要であるため, このような未知のパラメータについては全ての可能性を調べる必要がある。

重力波を特徴づけるパラメータが  $N$  種類あるとすると, その重力波はパラメータベクトル

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]\quad (3.44)$$

を導入すれば  $h(t; \boldsymbol{\lambda})$  として区別することができる。  $\lambda_i$  はその重力波波形における  $i$  番目のパラメータの値を表す。データに重力波  $h(t; \boldsymbol{\lambda})$  が含まれているという仮説を  $\mathcal{H}_\lambda$  とすると, その信号に対する尤度比は

$$\Lambda(\mathcal{H}_\lambda | s) = \frac{p(s | \mathcal{H}_\lambda)}{p(s | \mathcal{H}_0)}\quad (3.45)$$

である。すると, 検出に関する尤度比は

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{H}_1 | s) &= \frac{\int p(s | \mathcal{H}_\lambda) p(\mathcal{H}_\lambda) d\boldsymbol{\lambda}}{p(s | \mathcal{H}_0)} \\ &= \int \Lambda(\mathcal{H}_\lambda | s) p(\mathcal{H}_\lambda) d\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\quad (3.46)$$

となる。なお,  $p(\mathcal{H}_\lambda)$  はパラメータ  $\boldsymbol{\lambda}$  の重力波が本質的にどれくらい起こりやすいかを表す事前確率密度分布である。この積分が計算可能な場合もあるが, ほとんどの場合において計算不可能である。そこで, 常に利用可能な近似として, 最尤法に基づいた検出がなされる。それは与えられたデータに対して,  $\Lambda(\mathcal{H}_\lambda | s)$  が最も大きい  $\boldsymbol{\lambda}$  を採用し,  $\Lambda(\mathcal{H}_1 | s)$  を  $\Lambda(\mathcal{H}_\lambda | s)$  で近似するというものである。

式 (2.33) に示した四重極公式での重力波の生成メカニズムにおいて, その係数に重力波源からの距離  $r$  の逆数がかかっているのがわかる。つまり, 重力波の振幅は伝播距離に反比例して小さくなる。距離が未知であれば振幅も未知である。そこで, 重力波の波形は既知だが, 振幅が未知であるという場合を考える。つまり, 既知である重力波波形を  $g(t)$  と置くと, 観測データに含まれる重力波信号は

$$h(t; A) = Ag(t)\quad (3.47)$$

で表される。このとき、

$$\begin{aligned}\ln \Lambda(\mathcal{H}_A | s) &= (s, h(A)) - \frac{1}{2}(h(A), h(A)) = A(s, g) - \frac{A^2}{2}(g, g) \\ \frac{\partial}{\partial A} \ln \Lambda(\mathcal{H}_A | s) &= (s, g) - A(g, g)\end{aligned}\quad (3.48)$$

なので、データから最尤法によって推定される振幅  $A_{\text{fit}}$  は

$$A_{\text{fit}} = \frac{(s, g)}{(g, g)} \quad (3.49)$$

となる。したがって、この場合の検出統計量としては

$$\ln \Lambda(\mathcal{H}_{A_{\text{fit}}} | s) = \frac{(s, g)^2}{(g, g)} - \frac{1}{2} \frac{(s, g)^2}{(g, g)^2} (g, g) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(s, g)^2}{(g, g)} \quad (3.50)$$

となるから、この値が閾値を超えるかどうかを判定することで検出を行える。

### 3.2.3 事後確率分布推定

パラメータ推定を行うにあたっては大きく分けて頻度主義 (frequentist) という立場とベイズ統計 (Bayesian) という立場の2つがある。頻度主義の立場ではパラメータには真の値があってそれを推定するという考え方であるのに対し、ベイズ統計の立場ではパラメータの値そのものがある確率分布に従うという考え方をする。重力波のデータ解析においても Markov-Chain Monte Carlo (MCMC) 法 [11, 12] や nested sampling [13] と呼ばれる手法を用いて、ベイズ統計に基いてパラメータの事後確率分布の推定を行うことが行われている。ここでは基本的なメトロポリス法による MCMC 法について解説する。

ここでの目的は、観測データ  $s(t)$  の中に重力波信号が含まれているとしたとき、そのデータをもとにした重力波のモデルパラメータ  $\lambda$  の事後確率密度分布  $p(\lambda|s)$  を推定することである。ベイズの定理とこれまでに定義した量を用いることより、

$$\begin{aligned}p(\lambda|s) &= \frac{p(s|\mathcal{H}_\lambda)p(\mathcal{H}_\lambda)}{p(s)} \\ &= \frac{p(s|\mathcal{H}_0)}{p(s)} p(\mathcal{H}_\lambda) \Lambda(\mathcal{H}_\lambda|s) \\ &\propto p(\mathcal{H}_\lambda) \Lambda(\mathcal{H}_\lambda|s)\end{aligned}\quad (3.51)$$

と表すことができる。  $q(\lambda|s) := p(\mathcal{H}_\lambda) \Lambda(\mathcal{H}_\lambda|s)$  とすると、式 (3.37) より、

$$q(\lambda|s) = p(\mathcal{H}_\lambda) e^{(s, h_\lambda)} e^{-(h_\lambda, h_\lambda)} \quad (3.52)$$

であることがわかる。MCMC 法を使ってこの事後確率密度分布  $p(\lambda|s)$  を推定する手順を以下に示す。

- (i). 試行回数  $N$  とモデルパラメータ  $\lambda$  の事前確率密度分布  $p(\mathcal{H}_\lambda)$ 、ジャンプ幅  $\Delta\lambda$  の従う確率分布  $p_{\text{jump}}(\Delta\lambda)$  を設定する。
- (ii).  $i = 1$  とし、 $\lambda_i$  をランダムに選ぶ。
- (iii).  $\Delta\lambda_i$  を確率分布  $p_{\text{jump}}(\Delta\lambda)$  のもとでランダムに選び、 $\lambda'_i = \lambda_i + \Delta\lambda_i$  について次の  $r_i$  を計算する。

$$r_i = \frac{q(\lambda'_i|s)}{q(\lambda_i|s)}. \quad (3.53)$$

(iv). 区間  $[0, 1)$  の一様分布乱数  $r$  を生成し、以下のように  $\lambda_{i+1}$  を決める

$$\lambda_{i+1} = \begin{cases} \lambda'_i & (r_i > r) \\ \lambda_i & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (3.54)$$

(v).  $i < N$  ならば  $i \rightarrow i+1$  として (iii) に戻る。

(vi).  $N$  個の  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) は事後確率分布  $p(\lambda|s)$  からのランダムサンプリングとなるので、カーネル密度推定法などを用いて  $p(\lambda|s)$  を推定する。

ここで、MCMC によって得られた  $\lambda_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) が事後確率分布  $p(\lambda|s)$  に従うランダムサンプリングとなることを確かめる。まずこのマルコフ連鎖  $\{\lambda_j\}$  が定常分布を持つことを示す。一般に、マルコフ連鎖  $\{x_j\}$  ( $x_j \in X = \{X_i\}$ ) が定常分布を持つためには以下の 4 つの条件を満たす必要がある。

(A). 候補点間の推移確率が時間によらないこと (斉時性)

$$\forall i, j, m, n, \quad \Pr(x_n = X_j | x_0 = X_i) = \Pr(x_{n+m} = X_j | x_m = X_i). \quad (3.55)$$

(B). 任意の候補点から任意の候補点への遷移が可能であること (既約性)

$$\forall i, j, \quad \exists n > 0, \quad \text{s.t.} \quad \Pr(x_n = X_j | x_0 = X_i) > 0. \quad (3.56)$$

(C). 任意の候補点について、その現れ方に周期性が無いこと (非周期性)

$$\forall i, \quad \gcd\{n : \Pr(x_n = X_i | x_0 = X_i)\} = 1. \quad (3.57)$$

(D). 任意の候補点について、有限回の遷移でまたその候補点が現れる確率がゼロでないこと (再帰性)

$$\forall i, \quad \Pr(T_i < \infty) = 1, \quad \text{where} \quad T_i = \min\{n : x_n = X_i | x_0 = X_i\} \quad (3.58)$$

斉時性と既約性、非周期性を併せてエルゴード性と呼び、エルゴード性を持つマルコフ連鎖のことをエルゴード的マルコフ連鎖と呼ぶ。今考えているマルコフ連鎖において、ある時点  $i$  での値が  $\lambda_i = \lambda_A$  であったときに  $\lambda_{i+1} \in [\lambda_B, \lambda_B + d\lambda)$  となる確率を  $p(\lambda_A \rightarrow \lambda_B)d\lambda$  とすると

$$p(\lambda_A \rightarrow \lambda_B)d\lambda = \Pr(\lambda_B | \lambda_A) p(\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A)d\lambda \quad (3.59)$$

で表され、MCMC のアルゴリズムの定義より斉時性を持つことがわかる。他の条件も定義より確認できる。したがって、MCMC は定常分布を持つ。

次に、その定常分布が求めたい事後確率密度分布になることを示す。ある時点  $i$  において  $\lambda_i$  から  $\lambda'_i$  に遷移する確率  $\Pr(\lambda_i \rightarrow \lambda'_i)$  を考えると、 $r_i \geq 1$  であれば確率 1 で遷移し、 $r_i < 1$  の場合は  $r_i > r$  となる確率、つまり確率  $r_i$  で遷移することになるので、

$$\begin{aligned} \Pr(\lambda_i \rightarrow \lambda'_i) &= \Pr(r_i \geq 1) \times 1 + (1 - \Pr(r_i > 1)) \times \Pr(r_i > r) \\ &= \Pr(r_i \geq 1) + (1 - \Pr(r_i > 1)) \frac{q(\lambda'_i|s)}{q(\lambda_i|s)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

であり、両辺に  $q(\lambda_i|s)$  をかけると

$$\begin{aligned} q(\lambda_i|s)\Pr(\lambda_i \rightarrow \lambda'_i) &= \Pr(r_i > 1)q(\lambda_i|s) + (1 - \Pr(r_i > 1))q(\lambda'_i|s) \\ &= q(\lambda'_i|s) + (q(\lambda_i|s) - q(\lambda'_i|s))\Pr(r_i > 1) \end{aligned} \quad (3.61)$$

となる。逆に、ある時点での値がここで考えている  $\lambda'_i$  であったときに  $\lambda_i$  が次の候補になったとして、 $\lambda'_i$  から  $\lambda_i$  に遷移する確率は、

$$\begin{aligned} \Pr(\lambda'_i \rightarrow \lambda_i) &= \Pr(1/r_i > 1) + (1 - \Pr(1/r_i > 1)) \frac{q(\lambda_i|s)}{q(\lambda'_i|s)} \\ &= (1 - \Pr(r_i > 1)) + \Pr(r_i > 1) \frac{q(\lambda_i|s)}{q(\lambda'_i|s)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

であるので、

$$\begin{aligned} q(\lambda'_i|s)\Pr(\lambda'_i \rightarrow \lambda_i) &= (1 - \Pr(r_i > 1))q(\lambda'_i|s) + \Pr(r_i > 1)q(\lambda_i|s) \\ &= q(\lambda'_i|s) + (q(\lambda_i|s) - q(\lambda'_i|s))\Pr(r_i > 1) \end{aligned} \quad (3.63)$$

となる。したがって、 $r_i > 1$  となる確率に依らずに、

$$q(\lambda'_i|s)\Pr(\lambda'_i \rightarrow \lambda_i) = q(\lambda_i|s)\Pr(\lambda_i \rightarrow \lambda'_i) \quad (3.64)$$

が成り立つ。また、 $p(\lambda|s) \propto q(\lambda|s)$  より、

$$p(\lambda|s) = q(\lambda|s) / \left( \int d\lambda q(\lambda|s) \right) \quad (3.65)$$

であるから、これを使って、

$$p(\lambda'_i|s)\Pr(\lambda'_i \rightarrow \lambda_i) = p(\lambda_i|s)\Pr(\lambda_i \rightarrow \lambda'_i) \quad (3.66)$$

が得られる。これを詳細釣り合いの条件 (detailed balance) と呼ぶ。詳細釣り合いの条件の両辺を  $\lambda_i$  で積分すると

$$\int d\lambda_i \Pr(\lambda'_i \rightarrow \lambda_i) = 1 \quad (3.67)$$

であるから、

$$p(\lambda'_i|s) = \int d\lambda_i p(\lambda_i|s)\Pr(\lambda_i \rightarrow \lambda'_i) \quad (3.68)$$

となる。この式の右辺は時点  $i$  での値  $\lambda_i$  が確率密度分布  $p(\lambda_i|s)$  に従っているとしたときに、時点  $i+1$  での値が  $\lambda'_i$  になる確率密度を表しており、それが左辺の  $p(\lambda'_i|s)$  と等しいということなので、時点  $i$  での値の従う分布と時点  $i+1$  での値の従う分布は同一であることを表している。すなわち、 $p(\lambda|s)$  が MCMC の定常分布であり、望みどおりの分布が得られることが確かめられた。

Sluys ら [12] の実装ではモデルパラメータの  $j$  番目の要素について  $\sigma^j$  を設定しておき、正規分布  $N(0, \sigma^j)$  にしたがるガウス乱数を用いて  $\Delta\lambda^j$  を設定する方法を取っている。また、パラメータ空間内の広い範囲をカバーできるように、parallel tempering と呼ばれる拡張を行っている。Parallel tempering では、連鎖の温度パラメータ  $T \geq 1$  を導入して遷移確率に相当する  $r_i$  を

$$r_i := \left( \frac{q(\lambda'_i|s)}{q(\lambda_i|s)} \right)^{1/T} \quad (3.69)$$

に変更する。これによって尤度の下がる方向への遷移の頻度が上昇し、より広い範囲をカバーできるようになる。 $T$  の大きいものと小さいものを組合せることで、尤度の高い領域と低い領域の両方に焦点を当てることができる。

### 3.3 波形の予測が困難な場合

#### 3.3.1 Excess Power Method

マッチドフィルタ解析は検出したい信号の正確な波形  $h(t)$  がわかっている場合の検出手法であった。超新星爆発による重力波など、正確な波形を用意することが困難な重力波に対してはマッチドフィルタ解析以外の方法が必要となる。そういった場合に用いられているのが Excess Power Method である。

ある正規直交基底を成す  $N$  個の関数系  $\hat{e}_i(t)$  を考える。すなわち任意の  $i, j$  について

$$(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \delta_{ij} \quad (3.70)$$

が成り立つとする。左辺は式 (3.38) で定義されるノイズのパワースペクトル密度を考慮した内積であるが、白色化と組合せる場合には通常の内積で考えてもよい。つまり、

$$\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle := \int dt \hat{e}_i(t) \hat{e}_j(t) = \delta_{ij} \quad (3.71)$$

を満たすように選べばよい。重力波信号  $h(t)$  がこの基底を使って

$$h(t) = \sum_{i=1}^N c_i \hat{e}_i(t) \quad (3.72)$$

と展開できると仮定する。式 (3.37) より、係数ベクトル  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$  で示される重力波の検出の対数尤度比  $\ln \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbf{c}}|s)$  は、

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbf{c}}|s) &= (s, h) - \frac{1}{2}(h, h) \\ &= \sum_{i=1}^N c_i (s, \hat{e}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j (\hat{e}_i, \hat{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^N c_i (s, \hat{e}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ c_i (s, \hat{e}_i) - \frac{1}{2} c_i^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

となる。これを  $c_i$  で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \ln \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbf{c}}|s) = (s, \hat{e}_i) - c_i \quad (3.74)$$

であるから、対数尤度を最大にする  $\mathbf{c}_{\max}$  の各要素は

$$c_{\max, i} = (s, \hat{e}_i) \quad (3.75)$$

である。そしてその最大の対数尤度の 2 倍

$$\mathcal{E} := 2 \ln \Lambda(\mathcal{H}_{\mathbf{c}_{\max}}|s) = \sum_{i=1}^N (s, \hat{e}_i)^2 \quad (3.76)$$

のことを excess-power statistic という。

観測データ  $s(t)$  を基底で表現できる成分  $s_{\parallel}(t)$  と表現できない成分  $s_{\perp}(t)$  に分解する。すなわち、

$$s(t) = s_{\parallel}(t) + s_{\perp}(t), \quad \forall i \leq N, \quad (s_{\perp}, \hat{e}_i) = 0 \quad (3.77)$$

である。すると、excess-power statistics は

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N (s_{\parallel}, \hat{e}_i)^2 = \left( s_{\parallel}, \sum_{i=1}^N (s_{\parallel}, \hat{e}_i) \hat{e}_i \right) = (s_{\parallel}, s_{\parallel}) \quad (3.78)$$

となる。データにノイズしか含まれていない場合でそのノイズをガウスノイズと仮定すると、 $(n, \hat{e}_i)$  は平均 0 で分散  $(\hat{e}_i, \hat{e}_i) = 1$  のガウス分布に従う確率変数であるから、excess-power statistics

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N (n, \hat{e}_i)^2 \quad (3.79)$$

は自由度  $N$  の  $\chi^2$  分布にしたがう確率変数となる。すなわち、平均は  $N$  で、分散は  $2N$  である。一方で式 (3.72) の重力波信号  $h(t)$  がデータに含まれていたとすると、 $(n + h, \hat{e}_i)$  は平均  $c_i$ 、分散 1 のガウス分布に従う確率変数であるから、

$$\varrho^2 := (h, h) = \sum_{i=1}^N (h, \hat{e}_i)^2 = \sum_{i=1}^N c_i^2 \quad (3.80)$$

とすると、excess-power statistics

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N (n + h, \hat{e}_i)^2 \quad (3.81)$$

は自由度  $N$  の非心  $\chi^2$  分布にしたがい、その非心度  $\lambda$  は  $\varrho^2$  である。すなわち、平均は  $N + \varrho^2$  であり、分散は  $2N + 4\varrho^2$  となる。信号が含まれていることで excess-power statistics の平均値は  $\varrho^2$  だけ増加する。例えば、この値がノイズのみの場合での平均に標準偏差を加えた値よりも大きくなるための要件を考えると、 $\varrho > (2N)^{1/4}$  となる。このように、excess-power statistics の有効性は基底の数  $N$  によって制限される。  $N$  は重力波信号が捉えられる範囲をカバーしつつ、excess-power statistics が検出可能な大きさになるように設定する必要がある。

### 3.3.2 波形の再構築やパラメータ推定と不確定性原理

Excess-Power Method によって得られた  $c_{\max}$  を使って、観測データから波形の再構築を行うことができる。再構築された波形を  $h_{\text{rec},N}(t)$  とすると、

$$h_{\text{rec},N}(t) = \sum_{i=1}^N c_{\max,i} \hat{e}_i(t) = \sum_{i=1}^N (s, \hat{e}_i) \hat{e}_i(t) \quad (3.82)$$

とすればよい。実際には短時間フーリエ変換や Wavelet 変換をベースとして、 $\hat{e}_i(t)$  としては三角関数や Wavelet 母関数などを考えているので、この  $c_{\max}$  から、ある時間区間に含まれる周波数成分を考察することができる。あるいは、時間-周波数マップ (T-F マップ) を作ることで、視覚的にデータに含まれる周波数成分の時間発展を調べることができる。

しかしながら、これらの変換は不確定性原理によって分解能が制限されている。すなわち、時間分解能を高めようとするとき周波数分解能が下がってしまうという性質がある。短い時間で周波数変動するような波形を解析する場合や、周波数の変化する時刻を精密に調べる場合などには不向きである。このような場合には事前に決められた直交基底へと分解する手法ではなく、データから適合的に基底を選んで解析する手法が求められる。そのような適合的な解析手法の 1 つに Hilbert-Huang 変換があり、重力波のデータ解析にもいくつかの応用事例がある [14, 15, 16, 17, 18]。次章以降でこの Hilbert-Huang 変換について述べていく。



## 4 Hilbert-Huang 変換

前章で、現在重力波データ解析として広く用いられている概念や手法について述べた。そして、高分解能な解析が必要な場合など、既存の手法では対応できない場合があることについて述べた。本章では、データから適合的にモード分解基底を作成することによって、不確定性原理による大域的な分解能の制限を回避し、局所的に高分解能を実現した時間-周波数解析手法の Hilbert-Huang 変換について、その定義から性質、発展までをまとめる。

### 4.1 解析信号と瞬時周波数

最も簡単な信号である正弦波について考えると、正弦波  $s_0(t)$  は振幅  $a_0$  と周波数  $f_0$  の2つのパラメータで一意に特徴づけられ、

$$s_0(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) \quad (4.1)$$

と表される。ここで正弦波の位相を  $\phi_0(t) = 2\pi f_0 t$  とすると、

$$s_0(t) = a_0 \cos \phi_0(t) \quad (4.2)$$

と表すことができる。これを一般化して、ある信号  $s(t)$  を

$$s(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad (4.3)$$

と表すことができれば、この  $a(t)$  と  $\phi(t)$  はそれぞれ瞬時振幅 (IA: instantaneous amplitude) と瞬時位相 (IP: instantaneous phase) と呼ぶに相応しいものである。しかし、 $s(t)$  を与える  $a(t)$  と  $\phi(t)$  の組は無限に存在するため、これらをどう選ぶのかという問題が残っている。

視点を変えて、次のように表される複素信号  $s_c(t)$  を考える。

$$s_c(t) = a(t)e^{i\phi(t)} = s(t) + i s_I(t). \quad (4.4)$$

ここで、 $a(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $s(t)$ ,  $s_I(t)$  は実信号である。また、

$$a(t) = \sqrt{s(t)^2 + s_I(t)^2}, \quad \phi(t) = \arctan\left(\frac{s_I(t)}{s(t)}\right) \quad (4.5)$$

という関係がある。現実で物理的に取得される信号は実信号であるので、実部の  $s(t)$  を考えることになる。実信号から瞬時振幅と瞬時位相の組を決める自由度は、その実信号に対応する虚部の信号  $s_I(t)$  を選ぶ自由度と対応しているということがわかる。ここでは実信号からどのように虚部の信号を作るかについて考えていくことから瞬時振幅と瞬時位相の組の決め方を議論する。

まず実信号  $s(t)$  のフーリエ変換  $\tilde{s}(f)$  について、以下の式が成り立つ。

$$\tilde{s}(-f) = \tilde{s}^*(f). \quad (4.6)$$

すなわち  $|\tilde{s}(-f)|^2 = |\tilde{s}(f)|^2$  である。実信号について平均周波数  $\langle f \rangle$  を考えると、

$$\begin{aligned}
 \langle f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} df f |\tilde{s}(f)|^2 \\
 &= \int_0^{\infty} df f |\tilde{s}(f)|^2 + \int_{-\infty}^0 df f |\tilde{s}(f)|^2 \\
 &= \int_0^{\infty} df f |\tilde{s}(f)|^2 + \int_{\infty}^0 (-df) (-f) |\tilde{s}(-f)|^2 \\
 &= \int_0^{\infty} df f |\tilde{s}(f)|^2 + \int_{\infty}^0 df f |\tilde{s}(f)|^2 \\
 &= \int_0^{\infty} df f |\tilde{s}(f)|^2 - \int_0^{\infty} df f |\tilde{s}(f)|^2 = 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

と、常に 0 となる。これでは都合が悪いので、通常は積分区間を  $(-\infty, \infty)$  ではなく  $[0, \infty)$  にとる。ここで、単に平均周波数の定義（積分区間）を変更したという立場ではなく、平均周波数を求めるために  $(-\infty, 0)$  の区間の周波数成分を 0 にした信号を作ったという立場に立ってみる。つまり、その信号を  $z(t)$  とすると、

$$\tilde{z}(f) = \begin{cases} 2\tilde{s}(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

が成り立つようにするということである。このような  $z(t)$  を  $s(t)$  の解析信号とよぶ。係数の 2 はこの後の変形で  $z(t)$  の実部が  $s(t)$  と同じになるためのものである。これを逆フーリエ変換すると、

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{z}(f) e^{i2\pi ft} \\
 &= 2 \int_0^{\infty} df \tilde{s}(f) e^{i2\pi ft} \\
 &= 2 \int_0^{\infty} df \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') e^{-i2\pi ft'} \right) e^{i2\pi ft} \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') \int_0^{\infty} df e^{i2\pi f(t-t')} \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') \left( \frac{1}{2} \delta(t-t') + \frac{i}{2\pi(t-t')} \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' s(t') \delta(t-t') + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{s(t')}{t-t'} \\
 &= s(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{s(t')}{t-t'}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。 $\delta(x)$  はディラックのデルタ関数である。途中で使った

$$\int_0^{\infty} df e^{i2\pi f(t-t')} = \frac{1}{2} \delta(t-t') + \frac{i}{2\pi(t-t')} \tag{4.10}$$

という関係式は以下のように証明される。まず、デルタ関数の積分表示の式から

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{ipx} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \cos(px) + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sin(px) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp \cos(px)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

が得られる。これを使って、任意の  $a > 0$  について

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dp e^{ip(x-a)} &= \int_0^{\infty} dp \cos(p(x-a)) + i \int_0^{\infty} dp \sin(p(x-a)) \\
&= \pi\delta(x-a) + i \int_0^{\infty} dp \sin(p(x-a)) \\
&= \pi\delta(x-a) + i \int_0^{\pi/(x-a)} dp \sin(p(x-a)) + i \int_{\pi/(x-a)}^{\infty} dp \sin(p(x-a)) \\
&= \pi\delta(x-a) + i \left[ -\frac{1}{x-a} \cos(p(x-a)) \right]_0^{\pi/(x-a)} + 0 \\
&= \pi\delta(x-a) + \frac{i}{x-a}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

が得られる。 $x = t, a = t', p = 2\pi f$  とすれば式 (4.10) が得られる。

式 (4.9) は実信号  $s(t)$  から第 2 項のように虚部を作ることで、 $s(t)$  の正の周波数成分を保存した複素信号を作る式と見ることができるので、これは実信号に対応する虚部を決める 1 つのもっともらしい方法だと言えそうである。ただ、このままだと第 2 項の被積分関数は  $t' = t$  の部分が発散していて、積分できないので、主値を取ることにすると、この変換は Hilbert 変換として知られる変換である。実信号  $s(t)$  の Hilbert 変換を  $\mathcal{H}[s(t)]$  と書くことにすると、

$$s_I(t) = \mathcal{H}[s(t)] := \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{s(t')}{t-t'} \tag{4.13}$$

である。この  $s_I(t)$  を使えば、式 (4.5) から、 $s(t)$  の瞬時振幅  $a(t)$  と瞬時位相  $\phi(t)$  が定義できる。これ以降、瞬時振幅や瞬時位相といえは、式 (4.13) を使って定義されたものを表すこととする。

一方で、振幅信号  $a(t)$  と位相信号  $\phi(t)$  が与えられたときに、 $z(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$  が解析信号となるための条件も調べておく。 $a(t)$  と  $p(t) = e^{i\phi(t)}$  のフーリエ変換をそれぞれ  $\tilde{a}(f), \tilde{p}(f)$  とする。すなわち、

$$\tilde{a}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) e^{-i2\pi ft}, \tag{4.14}$$

$$\tilde{p}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\phi(t)} e^{-i2\pi ft} \tag{4.15}$$

である。積のフーリエ変換はフーリエ変換の畳み込みとなるので、 $z(t)$  のフーリエ変換  $\tilde{z}(f)$  は

$$\tilde{z}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{a}(f-f') \tilde{p}(f') \tag{4.16}$$

となる。これが  $f < 0$  で 0 となれば  $z(t)$  は解析信号となる。これより、少なくとも  $\tilde{a}(f), \tilde{p}(f)$  が全帯域に広がっているような場合には解析信号に成り得ないことがわかる。では、 $\tilde{a}(f)$  が  $-f_1 < f < f_1$  に帯域制限されている場合を考えてみると、積分に寄与する  $f'$  の範囲は

$$-f_1 < f - f' < f_1 \iff f - f_1 < f' < f + f_1 \tag{4.17}$$

となるので、この範囲において  $\tilde{p}(f')$  が 0 であれば  $\tilde{z}(f)$  は 0 となる。したがって、 $f' \leq f_1$  で  $\tilde{p}(f') = 0$  であれば  $f < 0$  において  $\tilde{z}(f) = 0$  となり、 $z(t)$  は解析信号となる。ここで、 $p(t) = e^{i\phi(t)}$  は実信号でないため、フーリエ変換の対称性は要請されないことに注意。言い換えると、 $a(t)$  の帯域が  $e^{i\phi(t)}$  の帯域よりも低周波であり、かつこの 2 つの帯域に重なりが無い場合に限って  $z(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$  は解析信号となる。先述した式 (4.5), (4.13) によって定義される  $a(t), \phi(t)$  においては、その定義内にこの条件が要請されて

いないため、原信号  $s(t)$  によっては解析信号が作れない場合がある。その際には、式 (4.8) が満たされな  
 いため、 $a(t)$ ,  $\phi(t)$  を用いた原信号  $s(t)$  に関する議論を行うことは妥当ではない。

瞬時振幅や瞬時位相のもつ性質をもう少し詳しく見ていこう。まず解析信号を導入したことによって平均周波数を定義できるようになったので、その式を見ていくと、

$$\begin{aligned}
 \langle f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} df f |z(f)|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} df f \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) e^{i2\pi ft} \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') e^{-i2\pi ft'} \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') \int_{-\infty}^{\infty} df f e^{i2\pi f(t-t')} \\
 &= -\frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{\partial}{\partial t'} e^{i2\pi f(t-t')} \\
 &= -\frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') \frac{d}{dt'} \int_{-\infty}^{\infty} df e^{i2\pi f(t-t')} \\
 &= -\frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') \frac{d}{dt'} \delta(t-t') \\
 &= \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{dz(t')}{dt'} \delta(t-t') \\
 &= \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \frac{dz(t)}{dt}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。ここまでは一般の複素信号について成り立つ式である。今は  $z(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$  であるから、これを代入すると、

$$\begin{aligned}
 \langle f \rangle &= \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) e^{-i\phi(t)} \left( \frac{da(t)}{dt} e^{i\phi(t)} + ia(t) e^{i\phi} \frac{d\phi(t)}{dt} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t)^2 \frac{d\phi(t)}{dt} + \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) \frac{da(t)}{dt} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d\phi(t)}{dt} |z(t)|^2 + \frac{1}{i4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{da(t)^2}{dt} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

が得られる。ここで、 $a(t)^2 = |z(t)|^2 \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$  として、虚部の表面積分は 0 とした。この式から、周波数領域におけるスペクトルの平均値（平均周波数）と、時間領域における瞬時位相の時間微分の平均値が等しいことがわかった。この事実をベースにして瞬時位相の時間微分を瞬時周波数 (IF: instantaneous frequency) と定義する。すなわち、信号  $s(t)$  の瞬時周波数を  $f(t)$  としたら、

$$f(t) := \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctan \left( \frac{\mathcal{H}[s(t)]}{s(t)} \right) \tag{4.20}$$

である。\$s\_I(t) = \mathcal{H}[s(t)]\$ とおき、\$\dot{s}(t)\$, \$\dot{s}\_I(t)\$ をそれぞれ \$s(t)\$, \$s\_I(t)\$ の時間微分としてさらに計算すると、

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 + (s_I(t)/s(t))^2} \frac{d}{dt} \frac{s_I(t)}{s(t)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{s(t)^2}{s(t)^2 + s_I(t)^2} \frac{\dot{s}_I(t)s(t) - s_I(t)\dot{s}(t)}{s(t)^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{s}_I(t)s(t) - s_I(t)\dot{s}(t)}{s(t)^2 + s_I(t)^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\dot{s}_I(t)s(t) - s_I(t)\dot{s}(t)}{a(t)^2} \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

という関係が得られる。

瞬時周波数の時間平均は平均周波数と等しいことがわかった。さらに標準偏差についても比較してみる。信号の周波数領域における標準偏差 \$\sigma\_f\$ は帯域幅と呼ばれ、

$$\begin{aligned}
 \sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} df (f - \langle f \rangle)^2 |\tilde{z}(f)|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') \int_{-\infty}^{\infty} df (f - \langle f \rangle)^2 e^{i2\pi f(t-t')} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') \int_{-\infty}^{\infty} df \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt'} - \langle f \rangle \right)^2 e^{i2\pi f(t-t')} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' z(t') \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt'} - \langle f \rangle \right)^2 \delta(t-t') \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right)^2 z(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right)^2 z(t) \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

となる。ここでこの式の部分積分を考えるために次の式を計算しておく。

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} \left\{ z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} \\
 &= \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} z^*(t) \right) \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} + z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} \right) \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} \\
 &= \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} z^*(t) \right) \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} + z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} \right) \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} \\
 &\quad + \langle f \rangle z^*(t) \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} - \langle f \rangle z^*(t) \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} \\
 &= \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} + \langle f \rangle \right) z^*(t) \right\} \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} \\
 &\quad + z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) \left\{ \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} \\
 &= - \left| \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right|^2 + z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right)^2 z(t). \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

これによって、

$$\begin{aligned}
 \sigma_f^2 &= \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d}{dt} \left\{ z^*(t) \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right\} + \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) z(t) \right|^2 \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

となる。平均周波数のときと同様、表面積分はゼロとした。ここまでは一般的な信号に対する帯域幅の式である。 $z(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$  を代入すると、

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{d}{dt} - \langle f \rangle \right) a(t)e^{i\phi(t)} \right|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \frac{1}{i2\pi} \frac{da(t)}{dt} e^{i\phi(t)} + \frac{1}{2\pi} d\phi(t) dt a(t) e^{i\phi(t)} - \langle f \rangle a(t) e^{i\phi(t)} \right|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \left( \frac{1}{i2\pi} \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} + f(t) - \langle f \rangle \right) a(t) e^{i\phi(t)} \right|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \frac{1}{i2\pi} \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} + f(t) - \langle f \rangle \right|^2 a(t)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \right)^2 + (f(t) - \langle f \rangle)^2 \right\} a(t)^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left( \frac{da(t)}{dt} \right)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - \langle f \rangle)^2 a(t)^2
\end{aligned} \tag{4.25}$$

が得られる。また、瞬時周波数の標準偏差を  $\sigma_{\text{IF}}$  とすると、

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{IF}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - \langle f(t) \rangle)^2 |z(t)|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - \langle f \rangle)^2 a(t)^2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

となり、式 (4.25) の第 2 項に等しい。式 (4.25) の第 1 項は非負なので、

$$\sigma_{\text{IF}} \leq \sigma_f \tag{4.27}$$

が成り立つ。等号が成立するのは  $a(t)$  が時間  $t$  によらず一定のときだけである。これらの意味するところとしては、瞬時振幅と瞬時周波数を導入したことによって、もとの信号の帯域幅を振幅の寄与と位相による寄与に分解できるということである。前者を振幅変調 (AM: amplitude modulation)、後者を周波数変換 (FM: frequency modulation) という。図 3 は振幅変調、周波数変調およびその両方を施した振幅-周波数変調の模式図である。信号から瞬時振幅と瞬時位相を抽出するというのは、振幅-周波数変調を復調することに等しい。

## 4.2 離散 Hilbert 変換

実際の観測データはサンプリングされた離散時間信号であるため、Hilbert 変換を離散時間信号に対して定義し直す必要がある。まず離散時間信号  $s[n]$  について、その離散時間フーリエ変換 (DTFT) を  $\tilde{s}(e^{i\omega})$  とすると、

$$\tilde{s}(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-i\omega n} \tag{4.28}$$

である。連続時間信号について解析信号を定義したときと同様に離散時間信号  $s[n]$  について

$$\tilde{z}(e^{i\omega}) = \begin{cases} 2\tilde{s}(e^{i\omega}) & (0 \leq \omega < \pi) \\ 0 & (-\pi \leq \omega < 0) \end{cases} \tag{4.29}$$

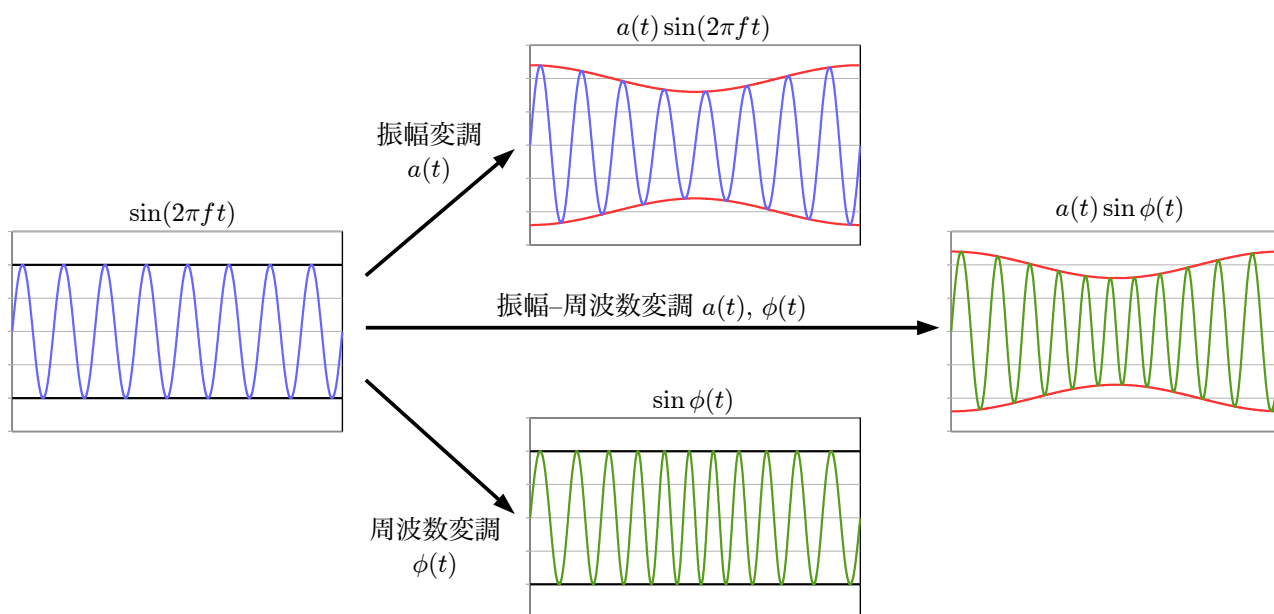


図 3: 振幅-周波数変調の模式図。

となる信号  $z[n]$  を  $s[n]$  の解析信号として定義する。任意の実信号  $x[n]$  については

$$\tilde{x}(e^{-i\omega}) = \tilde{x}^*(e^{i\omega}) \quad (4.30)$$

が成り立つため、 $z[n]$  は複素信号である。連続時間信号のときのように  $\tilde{z}(e^{i\omega})$  を逆 DTFT してもよいが、ここでは、実信号  $s_R[n]$ ,  $s_I[n]$  を使って、

$$z[n] = s_R[n] + i s_I[n] \quad (4.31)$$

とおいて考察を進めていく。この式の両辺を DTFT すると

$$\tilde{z}(e^{i\omega}) = \tilde{s}_R(e^{i\omega}) + i \tilde{s}_I(e^{i\omega}) \quad (4.32)$$

であり、この両辺の複素共役をとると、

$$\begin{aligned} \tilde{z}^*(e^{-i\omega}) &= \tilde{s}_R^*(e^{-i\omega}) - i \tilde{s}_I^*(e^{-i\omega}) \\ &= \tilde{s}_R(e^{i\omega}) - i \tilde{s}_I(e^{i\omega}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

が得られる。したがって、

$$\tilde{s}_R(e^{i\omega}) = \frac{\tilde{z}(e^{i\omega}) + \tilde{z}^*(e^{-i\omega})}{2}, \quad (4.34)$$

$$\tilde{s}_I(e^{i\omega}) = \frac{\tilde{z}(e^{i\omega}) - \tilde{z}^*(e^{-i\omega})}{2i} \quad (4.35)$$

が成り立つことがわかる。式 (4.29) より、

$$\begin{aligned} \tilde{z}^*(e^{-i\omega}) &= \begin{cases} 0 & (0 \leq \omega < \pi) \\ 2\tilde{s}^*(e^{-i\omega}) & (-\pi \leq \omega < 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & (0 \leq \omega < \pi) \\ 2\tilde{s}(e^{i\omega}) & (-\pi \leq \omega < 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.36)$$

であるから,

$$\begin{aligned}\tilde{s}_R(e^{i\omega}) &= \frac{\tilde{z}(e^{i\omega}) + \tilde{z}^*(e^{-i\omega})}{2} = \begin{cases} \tilde{s}(e^{i\omega}) & (0 \leq \omega < \pi) \\ \tilde{s}(e^{i\omega}) & (-\pi \leq \omega < 0) \end{cases} \\ &= \tilde{s}(e^{i\omega})\end{aligned}\quad (4.37)$$

であることがわかる。すなわち  $s_R[n] = s[n]$  であり,  $z[n] = s[n] + is_I[n]$  である。 $z[n]$  は  $s[n]$  の解析信号であるから,  $s[n]$  から  $s_I[n]$  への変換が離散 Hilbert 変換である。一方で, 式 (4.35) から,

$$\tilde{s}_I(e^{i\omega}) = \frac{\tilde{z}(e^{i\omega}) - \tilde{z}^*(e^{-i\omega})}{2i} = \begin{cases} -i\tilde{s}(e^{i\omega}) & (0 \leq \omega < \pi) \\ i\tilde{s}(e^{i\omega}) & (-\pi \leq \omega < 0) \end{cases}\quad (4.38)$$

が得られる。これより,

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} -i & (0 \leq \omega < \pi) \\ i & (-\pi \leq \omega < 0) \end{cases}\quad (4.39)$$

という関数  $H(e^{i\omega})$  を定義すれば

$$\tilde{s}_I(e^{i\omega}) = H(e^{i\omega})\tilde{s}(e^{i\omega})\quad (4.40)$$

という関係が成り立つので, この  $H(e^{i\omega})$  が離散 Hilbert 変換の伝達関数である。

伝達関数  $H(e^{i\omega})$  を逆 DTFT して離散 Hilbert 変換のインパルス応答  $h[n]$  を考えると, まず  $n \neq 0$  については

$$\begin{aligned}h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega H(e^{i\omega})e^{i\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 d\omega ie^{i\omega n} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\omega (-i)e^{i\omega n} \\ &= \frac{i}{2\pi} \left[ \frac{1}{in} e^{i\omega n} \right]_{\omega=-\pi}^{\omega=0} - \frac{i}{2\pi} \left[ \frac{1}{in} e^{i\omega n} \right]_{\omega=0}^{\omega=\pi} \\ &= \frac{1}{2n\pi} (1 - e^{-in\pi} - e^{in\pi} + 1) \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin^2 \left( \frac{n\pi}{2} \right)\end{aligned}\quad (4.41)$$

となる。そして  $n = 0$  については

$$h[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 d\omega i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\omega (-i) = 0\quad (4.42)$$

である。まとめると

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sin^2 \left( \frac{n\pi}{2} \right) & (n \neq 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}\quad (4.43)$$

となる。このインパルス応答を使えば, 離散 Hilbert 変換の IIR フィルタ表現

$$s_I[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]s[n-k]\quad (4.44)$$

が得られる。



## 4.3 複数のモードを重ね合わせた信号に対する Hilbert 変換

ここまでは信号  $s(t)$  が単一の瞬時振幅と瞬時位相の組で表されるという前提で議論してきた。複数の信号の重ね合わせで表される場合の挙動も確かめておく。簡単な例として

$$s(t) = \alpha \cos(2\pi ft) + \beta \quad (4.45)$$

という信号を考える。第1項と第2項を独立に考えると、第1項の瞬時振幅  $a_1(t)$  と瞬時位相  $\phi_1(t)$  はそれぞれ  $a_1(t) = \alpha$ ,  $\phi_1(t) = 2\pi ft$  と考えることができ、第2項の瞬時振幅  $a_2(t)$  と瞬時位相  $\phi_2(t)$  はそれぞれ  $a_2(t) = \beta$ ,  $\phi_2(t) = 0$  と考えることができる。ひとまず  $s(t)$  をそのまま Hilbert 変換すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[s(t)] &= \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\alpha \cos(2\pi ft') + \beta}{t - t'} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\cos(2\pi ft')}{t - t'} + \frac{\beta}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{t - t'} \\ &= \alpha \sin(2\pi ft) \end{aligned} \quad (4.46)$$

となる。ここで各主値積分はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{t - t'} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} dt' \frac{1}{t - t'} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} dt' \frac{1}{t - t'} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ [-\ln(t - t')]_{t'=-\infty}^{t-\varepsilon} - [\ln(t' - t)]_{t'=t+\varepsilon}^{+\infty} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ -\ln \varepsilon + \ln \varepsilon + \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln(t + y) - \ln(y - t)) \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \frac{t + y}{y - t} = \ln 1 = 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\cos(2\pi ft')}{t - t'} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} dt' \frac{\cos(2\pi ft')}{t - t'} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} dt' \frac{\cos(2\pi ft')}{t - t'} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{\infty}^{\varepsilon} (-d\tau) \frac{\cos(2\pi f(t - \tau))}{\tau} + \int_{\varepsilon}^{\infty} d\tau' \frac{\cos(2\pi f(\tau' + t))}{-\tau'} \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} d\tau \frac{\cos(2\pi f(t - \tau)) - \cos(2\pi f(\tau + t))}{\tau} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\infty} d\tau \frac{2 \sin(2\pi ft) \sin(2\pi f\tau)}{\tau} \\ &= 2 \sin(2\pi ft) \int_0^{\infty} d\tau \frac{\sin(2\pi f\tau)}{\tau} \\ &= \pi \sin(2\pi ft) \end{aligned} \quad (4.48)$$

となる。途中で sinc 関数の定積分の公式

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \frac{1}{2} \quad (4.49)$$

を使った。したがって、この  $\mathcal{H}[s(t)]$  から計算される瞬時振幅  $a(t)$  と瞬時周波数  $f(t)$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{(\alpha \cos(2\pi ft) + \beta)^2 + \alpha^2 \sin^2(2\pi ft)} \\ &= \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha\beta \cos(2\pi ft) + \beta^2} \\ &= \alpha \sqrt{1 + \frac{2\beta \cos(2\pi ft)}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi\alpha f \cos(2\pi ft)(\alpha \cos(2\pi ft) + \beta) - (-2\pi\alpha f \sin(2\pi ft))\alpha \sin(2\pi ft)}{a(t)^2} \\ &= \frac{\alpha^2 f + \alpha\beta f \cos(2\pi ft)}{a(t)^2} \\ &= \frac{f(a(t)^2 - 2\alpha\beta \cos(2\pi ft) - \beta^2) + \alpha\beta f \cos(2\pi ft)}{a(t)^2} \\ &= f \left( 1 - \frac{\alpha\beta \cos(2\pi ft) + \beta^2}{a(t)^2} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

となり、両方のモードが非線形に混ざった値を取ってしまう。 $\beta = 0$  であれば正しく  $a(t) = \alpha$ ,  $f(t) = f$  となることもわかる。この例のようにトレンドの乗っている信号についてはそのまま扱うことができない。

## 4.4 Hilbert-Huang 変換 (HHT) の定義

### 4.4.1 Empirical Mode Decomposition

Hilbert 変換による瞬時振幅と瞬時周波数の導入は複数のモードが重ね合わさった信号に対しては物理的な成分を取り出せないため、使用できる場面が非常に限られていた。Hahn らは狭い帯域のバンドパスフィルタをかけることでデータをふるい分け、それぞれのバンドのデータに対して Hilbert 変換するという直感的な拡張を提唱していた。正しくバンドを選べれば効果はあるが、そのバンドの選び方について議論が残る状況であった。Huang ら [19] は経験的モード分解 (EMD: Empirical Mode Decomposition) と呼ばれる手法を導入することで、これらの問題点を解決し、Hilbert 変換の強みを活かした時間周波数解析手法である Hilbert-Huang 変換を確立した。ここでは EMD について詳細を述べる。

EMD はどんなデータも種々の簡単な固有の振動モードから成り立っているという仮定のもとに作られた。この固有の振動モードを関数にして表したものを固有モード関数 (IMF: Intrinsic Mode Function) と呼ぶ。IMF は以下の条件を満たすものとして定義される。

1. データ全体で極値の個数とゼロを交差する回数が等しいか、1 だけ異なる。
2. 極大値の包絡線と極小値の包絡線の平均値がすべての時刻においてゼロである。

単振動の正弦波であればこれらの条件を満たすことがわかる。IMF は単振動を一般化して、可変な振幅と周波数を持った波を扱う概念であり、これらの条件を満たすことによって Hilbert 変換が効果を発揮することを保証している。EMD はデータから適合的にこの IMF を取り出すための手法である。あるデータ  $x(t)$  に EMD を適用する手順の概略を以下にまとめる。

- (i).  $i = 1$ ,  $x_i(t) = x(t)$  とする。
- (ii).  $j = 1$ ,  $x_{i,j}(t) = x_i(t)$  とする。
- (iii).  $x_{i,j}(t)$  の極大値と極小値をそれぞれ抽出し、3 次スプライン補間によって極小値の包絡線  $u_{i,j}(t)$  と極大値の包絡線  $l_{i,j}(t)$  を作る。

(iv).  $u_{i,j}(t)$  と  $l_{i,j}(t)$  の平均  $m_{i,j}(t)$  を計算する。

$$m_{i,j}(t) = (u_{i,j}(t) + l_{i,j}(t))/2. \quad (4.52)$$

(v).  $x_{i,j}(t)$  から平均  $m_{i,j}(t)$  を引いたものを  $x_{i,j+1}(t)$  とする。

$$x_{i,j+1}(t) = x_{i,j}(t) - m_{i,j}(t). \quad (4.53)$$

(vi).  $x_{i,j+1}(t)$  が後述する収束条件を満たしていなかったら  $j \rightarrow j+1$  として (iii) に戻る。

(vii).  $x_{i,j+1}(t)$  を  $i$  番目の IMF とする。

$$\text{IMF}_i(t) = x_{i,j+1}(t). \quad (4.54)$$

(viii).  $x_i(t)$  から  $\text{IMF}_i(t)$  を引いたものを  $x_{i+1}(t)$  とする。

$$x_{i+1}(t) = x_i(t) - \text{IMF}_i(t). \quad (4.55)$$

(ix).  $x_{i+1}(t)$  が単調な成分になっていなく、振動モードが含まれていれば、 $i \rightarrow i+1$  として (ii) に戻る。

(x).  $N_{\text{IMF}} = i$  として  $x_{N_{\text{IMF}}+1}(t)$  を残留成分  $r(t)$  として EMD を終了する。

$$r(t) = x_{N_{\text{IMF}}+1}(t). \quad (4.56)$$

このようにして  $N_{\text{IMF}}$  個の IMF と 1 個の残留成分が得られる。この中でも特に (iii) から (vi) の処理をふるい処理 (sifting process) という。得られた成分から原信号を復元するには

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N_{\text{IMF}}} \text{IMF}_i(t) + r(t) \quad (4.57)$$

とすればよい。ふるい処理の収束条件は以下の 2 種類が提唱されており、どちらか一方あるいは両方を採用する。なお、現実的には繰り返し回数の上限も設定しておき、 $j+1$  がその上限に達したら繰り返しを終了するように実装しておく必要がある。

**収束条件 A.** 次式で定義される  $x_{i,j+1}(t)$  と  $x_{i,j}(t)$  との 2 乗偏差  $\sigma_j$  が事前に決めた基準  $\epsilon_e$  よりも小さければ収束とする。

$$\sigma_j := \frac{\int dt (x_{i,j}(t) - x_{i,j+1}(t))^2}{\int dt x_{i,j}(t)^2}. \quad (4.58)$$

**収束条件 B.** 事前に決めた整数  $S$  について、 $x_{i,j}(t)$  と  $x_{i,j+1}(t)$  とで極値の個数とゼロを交差する回数に変化せずにこれらが等しいか 1 だけ違うことが  $S$  回続いたら収束とする。

本研究では特に収束条件 **A** を採用する。したがって EMD を実行する際には、パラメータとして  $\epsilon_e$  を事前に決める必要がある。 $\epsilon_e$  は大きければいいというものでも小さければいいというものでもなく、与えられた入力信号と抽出したい振動モードによって適切な値を選ぶ必要がある。収束条件 **B** を選んだ際も  $S$  の値は状況に応じて適切に選ぶ必要がある。このようにパラメータを経験的に決める必要があるところが経験的モード分解と呼ばれる理由である。

#### 4.4.2 Hilbert スペクトル解析

EMD によって原信号  $x(t)$  を IMF と残留成分に分解することができた。そうしたら各 IMF に Hilbert 変換を施すことで、各 IMF の瞬時振幅と瞬時周波数を得ることができる。すなわち、 $j$  番目の IMF の瞬時振幅を  $a_j(t)$ 、瞬時位相を  $\phi_j(t)$ 、瞬時周波数を  $f_j(t)$  とすると、

$$a_j(t)e^{i\phi_j(t)} = \text{IMF}_j(t) + i\mathcal{H}[\text{IMF}_j(t)] \quad (4.59)$$

が成り立ち、

$$a_j(t) = \sqrt{\text{IMF}_j(t)^2 + \mathcal{H}[\text{IMF}_j(t)]^2}, \quad \phi_j(t) = \arctan\left(\frac{\mathcal{H}[\text{IMF}_j(t)]}{\text{IMF}_j(t)}\right), \quad f_j(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_j(t)}{dt} \quad (4.60)$$

である。また、瞬時振幅と瞬時位相から原信号を復元する際には

$$x(t) = \text{Re} \left[ \sum_{i=1}^{N_{\text{IMF}}} a_i(t)e^{i\phi_i(t)} \right] = \sum_{i=1}^{N_{\text{IMF}}} a_i(t) \cos \phi_i(t) \quad (4.61)$$

とすればよい。ここで、残留成分  $r(t)$  については瞬時振幅や瞬時周波数の議論をしないことが多いため、再構成の式においても考慮に入れないことが多い。もちろん、残留成分が物理的に意味のある成分である場合は考慮に入れる必要がある。

各 IMF の瞬時振幅と瞬時周波数がそれぞれ時間  $t$  の関数として得られているため、この情報を時間-周波数-振幅の 3 次元空間へマップすることが可能となる。つまり、振幅を時間と周波数の関数とした

$$H(t, f) = \sum_{j: f_j(t)=f} a_j(t) \quad (4.62)$$

を得ることができる。この  $H(t, f)$  を Hilbert 振幅スペクトルあるいは単に Hilbert スペクトルという。このようにして原信号から Hilbert スペクトルを得る解析を Hilbert スペクトル解析 (HSA: Hilbert Spectral Analysis) という。狭義には IMF から瞬時振幅と瞬時周波数を得ることを HSA と呼ぶこともある。そして、EMD と HSA を組合せて Hilbert-Huang 変換 (HHT: Hilbert-Huang transform) という。

比較のために、複素フーリエ級数展開の式を見てみると、

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi k f_0 t} \quad (4.63)$$

であり、式 (4.61) と比べると、振幅と周波数が一定であるという制約のもとでモードの広がりを無限大に広げることで入力と一致させる式になっていることがわかる。この例を見てわかるように、フーリエ変換やウェーブレット変換のような固定の基底での分解では、非定常波形や非線形波形の分解において複数の基底を使って無理やり一致させることによる疑似調波と呼ばれる成分が出てくる。一方で、HHT はデータから適合的に IMF を作るため、疑似調波の存在しないモード分解が可能であるという強みがある。

## 4.5 HHT の課題

HHT は既存の時間周波数解析手法と比較すると、時間周波数解像度が適応的であり、不確定性原理による大域的な影響を受けないというメリットがあり、重力波のような短い時間スケールで大きく周波数変動する信号解析には有用である。その一方で、科学的な議論に用いるにあたって解決する必要がある課題がいくつか存在する。ここでは現在提唱されている HHT の課題について述べていく。

### 4.5.1 瞬時周波数の導入における課題

Cohen ら [20] が瞬時周波数を導入した際に、瞬時周波数はその解釈において以下のようなパラドックスに思える点があることを指摘している。

1. 瞬時周波数は原信号のスペクトルに含まれていない周波数の値を取ることもある
2. 線スペクトルの場合でも連続的に変化することがある
3. 解析信号のスペクトルは負の周波数においてゼロであるが、瞬時周波数は負の値を取ることもある
4. 帯域制限信号の瞬時周波数が大域の外に出ることがある
5. 瞬時周波数は信号の全時刻の成分に依存する

### 4.5.2 EMD における課題

EMD を提唱した Huang らは EMD はあくまでも経験的にその効果が確かめられているだけに過ぎず、理論的な基礎が確立していないことを認めた上で、具体的に以下のような課題をあげている [21]。

1. 包絡線を得るための補間法の選び方
2. IMF の論理的な選び方および最適化問題
3. データの終端における性能低下と、それを緩和するためのデータの予測を非定常データにおいてどう行うか
4. 常に Hilbert 変換によって適切な瞬時振幅と瞬時周波数が得られるわけではない

また、実用的な面から見ても分離されるべき複数のモードが 1 つの IMF に混在して分解されてしまう mode-mixing という問題 [22, 23] と、物理的には 1 つのモードである成分が複数の IMF に分かれて分解されてしまう mode-splitting という問題 [24] が確認されている。前者の mode-mixing の問題について、実例も踏まえて説明する。図 4(c) に示したような 2 つの信号の重ね合わさった信号について見ていく。ここで Signal 1 (図 4(a) の式を  $s_1(t)$ ), Signal 2 (図 4(b) の式を  $s_2(t)$ ) とするとそれぞれ

$$s_1(t) = \cos(8\pi t), \quad (4.64)$$

$$s_2(t) = \begin{cases} -0.2 \cos(64\pi t) \times \text{Tukey}(t - t_{2m}, T, \alpha) & (t_{2m} \leq t < t_{2m+1}, m = 1, 2, 3), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (4.65)$$

と定義したものであり、各定数は

$$t_{2m} = \frac{m}{4} - \frac{7}{128}, \quad t_{2m+1} = \frac{m}{4} + \frac{7}{128}, \quad T = t_{2m+1} - t_{2m} = \frac{7}{64}, \quad \alpha = 0.25 \quad (4.66)$$

とした。Tukey( $t, T, \alpha$ ) は Tukey 窓関数であり,

$$\text{Tukey}(t, T, \alpha) = \begin{cases} \frac{1 + \cos[\pi\{2t/(\alpha T) - 1\}]}{2} & (0 \leq t < \alpha T/2), \\ \frac{1 + \cos[\pi\{2t/(\alpha T) - 2/\alpha - 1\}]}{2} & (T(1 - \alpha/2) < t \leq T), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (4.67)$$

と定義される ( $0 < \alpha \leq 1$ )。Tukey 窓をかけたのは振動の開始が 0 から滑らかに遷移するようにするためである。この信号について、EMD ではまず極大値と極小値を探して上側包絡線と下側包絡線を作る。それが図 4(d) である。包絡線が信号と交差しているなど、望ましい結果ではないことがわかる。図 4(e) はふるい処理を 1 度行った結果である。

ふるい処理を繰り返して EMD を実行し、実際に得られた IMF1,2 と残留成分を図 5 に示している。IMF1 には高周波成分である Signal 2 だけでなく、低周波の Signal 1 の影響が残っていることがわかる。このように 1 つの IMF に複数の振動モードの成分が混ざって抽出されることが mode-mixing である。

あるいは Signal 2 を突発的なノイズとみなした場合、EMD はノイズの存在によって Signal 1 の解析結果に質的な違いが生じてしまう。短時間フーリエ変換や Wavelet 変換などの固定の基底を用いる方法においては、ノイズの影響はあくまでも量的なものであり、質的な違いは生じ得ない。このように入力にノイズが含まれた場合においても出力の質的な性質が変わらないことをその手法は頑健であるという。EMD は頑健な手法ではないと言える。まずはこの mode-mixing 問題を実用的に解決してある程度の頑健性を持たせた手法として Ensemble EMD (EEMD) という手法が Huang らによって提唱されている [25]。その他の課題についても種々の改良手法が提唱されてきている状況である [26, 27, 28, 29, 24, 30]。

## 4.6 Ensemble EMD (EEMD)

まずは EEMD の定義から説明する。あるデータ  $x(t)$  に EEMD を適用するアルゴリズムを書き出すと以下ようになる。

- (i). 入力データ  $x(t)$  と同じ長さのホワイトガウスノイズを  $N_e$  個用意する。 $j$  番目のホワイトノイズを  $w^{(j)}(t)$  と書く ( $j = 1, \dots, N_e$ )。
- (ii).  $j = 1, \dots, N_e$  について、入力データ  $x(t)$  に  $w^{(j)}(t)$  を加えた  $x^{(j)}(t) = x(t) + w^{(j)}(t)$  を作成し、それを EMD することで、 $N_{\text{IMF}}^{(j)}$  個の IMF を得る。

$$x^{(j)}(t) = x(t) + w_j(t) = \sum_{k=1}^{N_{\text{IMF}}^{(j)}} c_k^{(j)}(t) + r^{(j)}(t) \quad (4.68)$$

- (iii).  $N_e$  個の  $c_k^{(j)}(t)$  のアンサンブル平均を取ったものを EEMD による  $x(t)$  の  $k$  番目の IMF  $c_k(t; N_e)$  とする。

$$c_k(t; N_e) = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} c_k^{(j)}(t) \quad (4.69)$$

EMD では収束条件に関する  $\epsilon_e$  あるいは  $S$  がパラメータであったが、EEMD ではさらに 2 つのパラメータが追加される。1 つ目は入力データに加えるホワイトガウスノイズの標準偏差  $\sigma_e$  である。すなわち、どれくらいの大きさ (エネルギー) のホワイトガウスノイズを加えるかを指定するパラメータである。

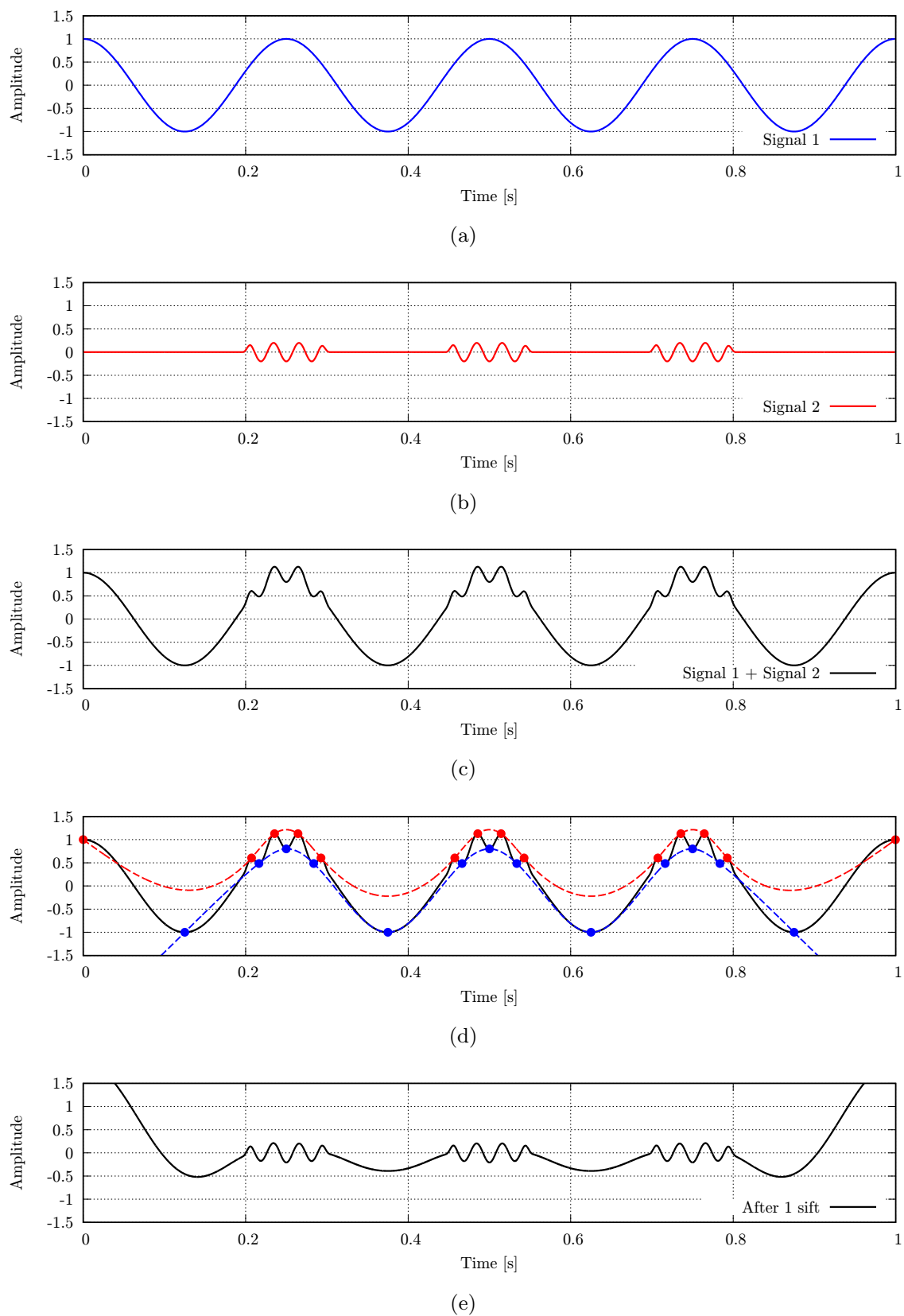


図 4: 低周波の Signal 1 と高周波で突発的な Signal 2 の混ざった信号について EMD の動作の様子

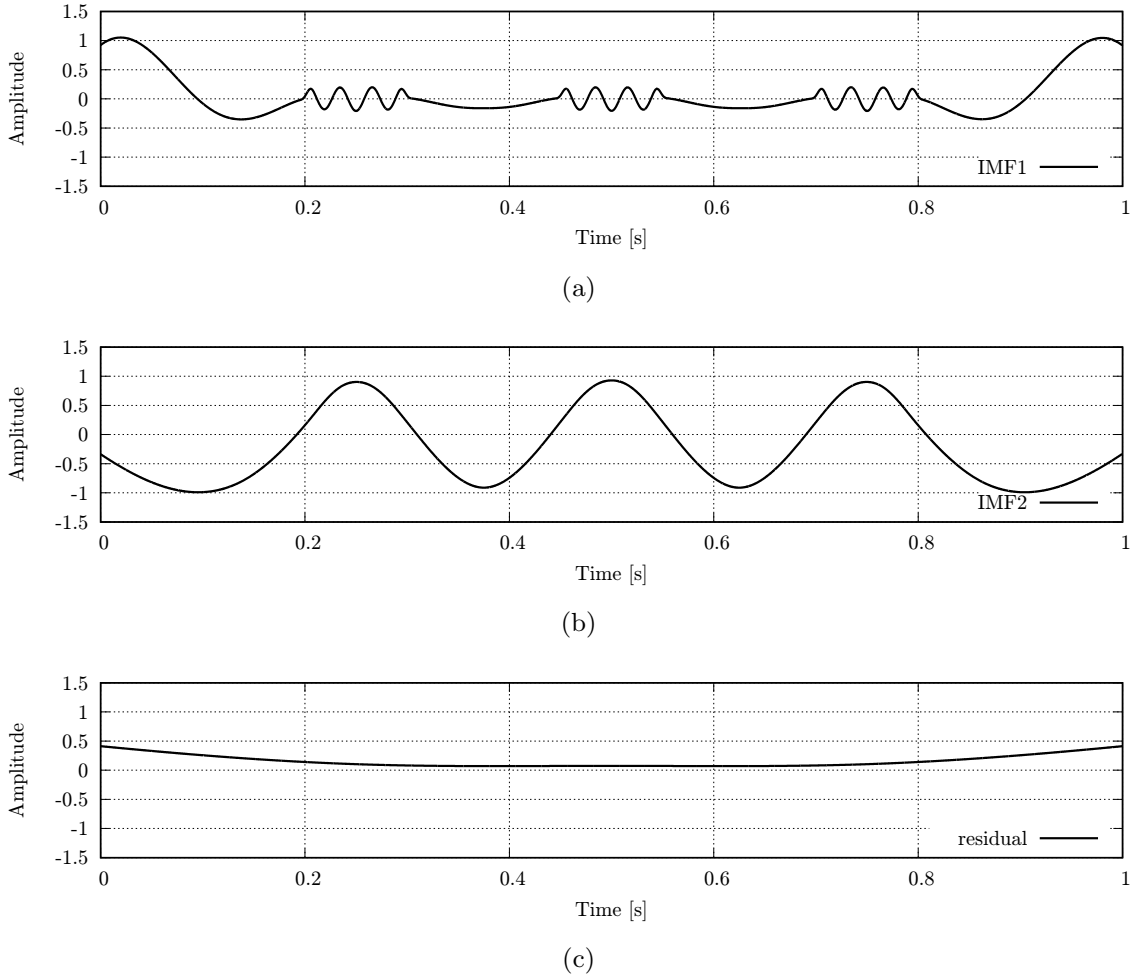


図5: 図4の信号をEMDして最終的に得られたIMFと残留成分

この値は入力データ自体の標準偏差との相対値を用いることで、入力データの大きさに依存せずにおおよそその適した値の範囲を決めることができる。一方で、データの一部に大きな振幅が集中しているようなデータでは入力データの標準偏差どの程度の値となるか直感的にわかりづらく、またデータ長に依存してしまうので、 $\sigma_e$ を相対値で定義している場合には注意が必要となる。2つ目のパラメータはアンサンブル数  $N_e$  である。アンサンブル数が多いほど、加えたノイズによる影響を小さくできることが期待できるが、その計算時間が大きくなる。

以下、厳密な議論ではないが、EEMDの正当性および  $N_e$  への依存性について考えていく。ノイズを加えたデータ  $x^{(j)}(t)$  をEMDして得られたIMF  $c_k^{(j)}(t)$  と真のIMF  $c_k(t)$  との差を  $d_k^{(j)}(t)$  とする。この  $d_k^{(j)}(t)$  は  $x^{(j)}(t)$  に加わっているノイズ  $w^{(j)}(t)$  の  $k$  番目のIMFであることが期待される。つまり、

$$w^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{N_{\text{IMF}}^{(j)}} d_k^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{N_{\text{IMF}}^{(j)}} (c_k(t) - c_k^{(j)}(t)) \quad (4.70)$$

ということである（簡単のために残留成分は除いて考えている）。これを仮定すると、ホワイトノイズに対してEMDを行った場合の挙動についてはWuら[31]やFlandrinら[32]が調査しており、EMDは高周波の帯域から順次取り出していくダイアディックフィルターバンクとして働くことがわかっている。すなわち、近似的には  $d_k^{(j)}(t)$  は帯域制限されたホワイトノイズとなる。また、アンサンブル数  $N_e$  でのEEMD



で得られる IMF  $c_k(t; N_e)$  は

$$c_k(t; N_e) = \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \left( c_k(t) - d_k^{(j)}(t) \right) = c_k(t) - \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} d_k^{(j)}(t) \quad (4.71)$$

と表すことができる。したがって、 $N_e \rightarrow \infty$  の極限を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{N_e \rightarrow \infty} c_k(t; N_e) &= c_k(t) - \lim_{N_e \rightarrow \infty} \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} d_k^{(j)}(t) \\ &= c_k(t) \end{aligned} \quad (4.72)$$

と、真の IMF に収束することが期待される。 $N_e$  が有限の場合について考えると、式 (4.71) の右辺第 2 項は標準偏差が  $d_k^{(j)}(t)$  単体での標準偏差の  $1/\sqrt{N_e}$  倍になっているはずなので、得られる IMF と真の IMF との誤差の二乗平均平方根は  $1/\sqrt{N_e}$  に比例して小さくなっていくことが期待できる。

先に述べたように、EMD はノイズに対して頑健でないため、ノイズが加わった際に同一の成分が常に同じ IMF に分解されるとは限らない。特に帯域の近い信号成分が重ね合わさったデータについては、加わるノイズによって挙動が異なることが予想される。しかしながら、データに含まれる信号成分の帯域が離れていたり、単一の成分のみである場合においては、上記の議論は実用上成り立っており、重要となってくる。

実際に、EMD では mode-mixing を起こした図 4(c) の波形について、EEMD で解析を行ってみる。図 6 に、 $N_e = 1$  としたときの結果、つまり単にデータにノイズを加えたものを EMD した結果を載せる。この時点ではアンサンブル平均を取っていないが、低周波成分である Signal 1 は IMF6 に、高周波成分である Signal 2 は IMF4 に主に分解されており、この 2 つは混ざっていないことがわかる。ノイズを加えたことによって、Signal 1 と Signal 2 を重ね合わせたことによる極値の位置の変化がかき消されたことによって、この 2 つのモードに関する mode-mixing が抑えられている。そして、図 7 に、 $N_e = 100$  としたときの結果を載せている。IMF4 のグラフ上の赤破線は Signal 2 の元波形であり、IMF6 のグラフ上の青破線は Signal 1 の元波形である。Signal 1 の成分は IMF5 にも少し出てしまっているが、元の 2 つの成分をよく分離できており、またノイズの影響はほとんど見えなくなっていることがわかる。EEMD が mode-mixing の影響を抑え、頑健性を高めることに貢献していることがわかった。

EMD のときはパラメータ  $\epsilon_e$  または  $S$  を経験的に選ぶ必要があることを述べた。EEMD ではさらに  $\sigma_e$  と  $N_e$  が増え、これらがそれぞれ相互に関係するため、EMD よりもさらにパラメータの選び方が複雑になる。

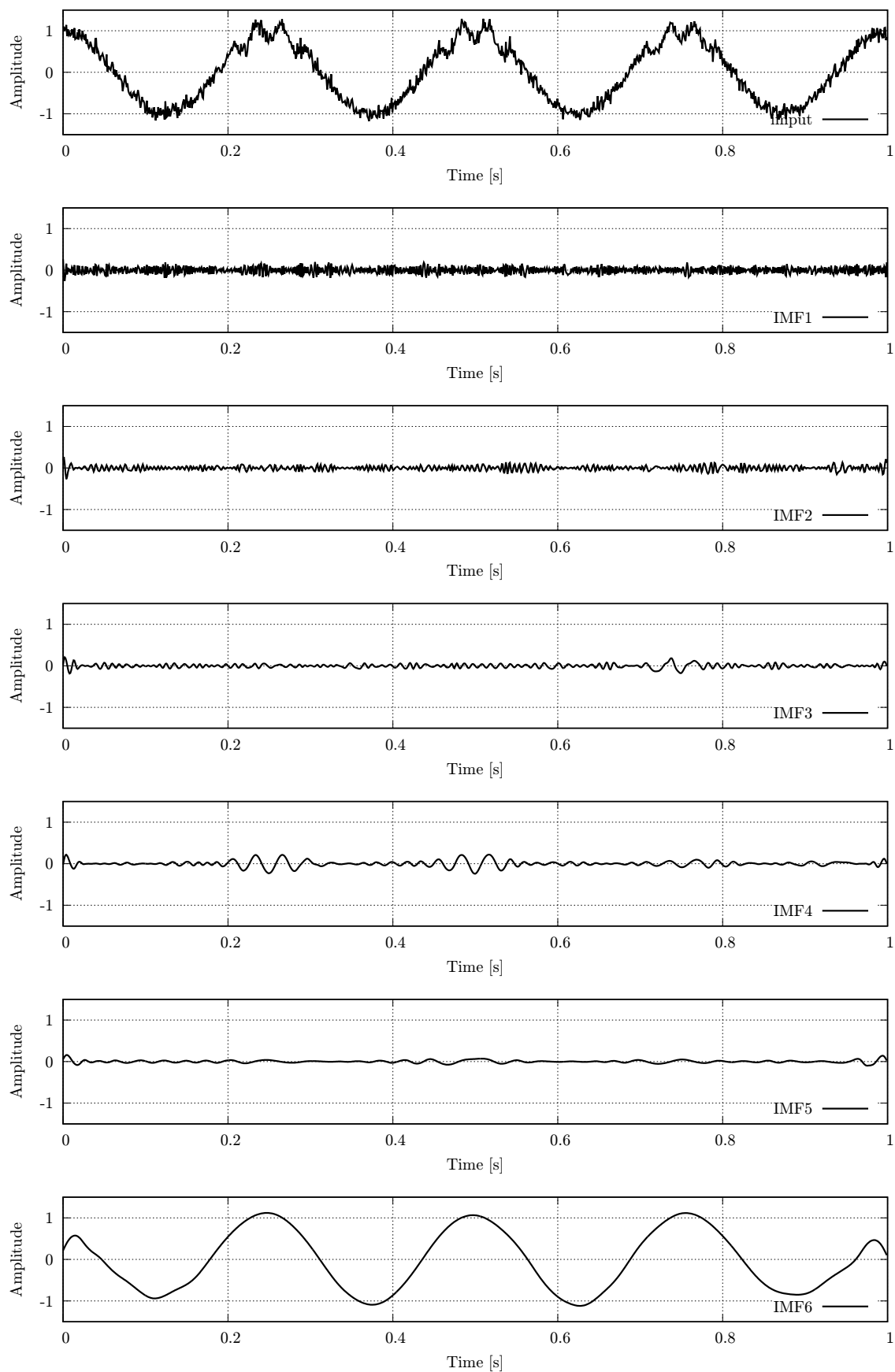


図 6: 図 4(c) の波形を  $N_e = 1$  で EEMD したときの結果 ( $\sigma_e = 0.1$ ,  $\epsilon_e = 10^{-4}$ )。

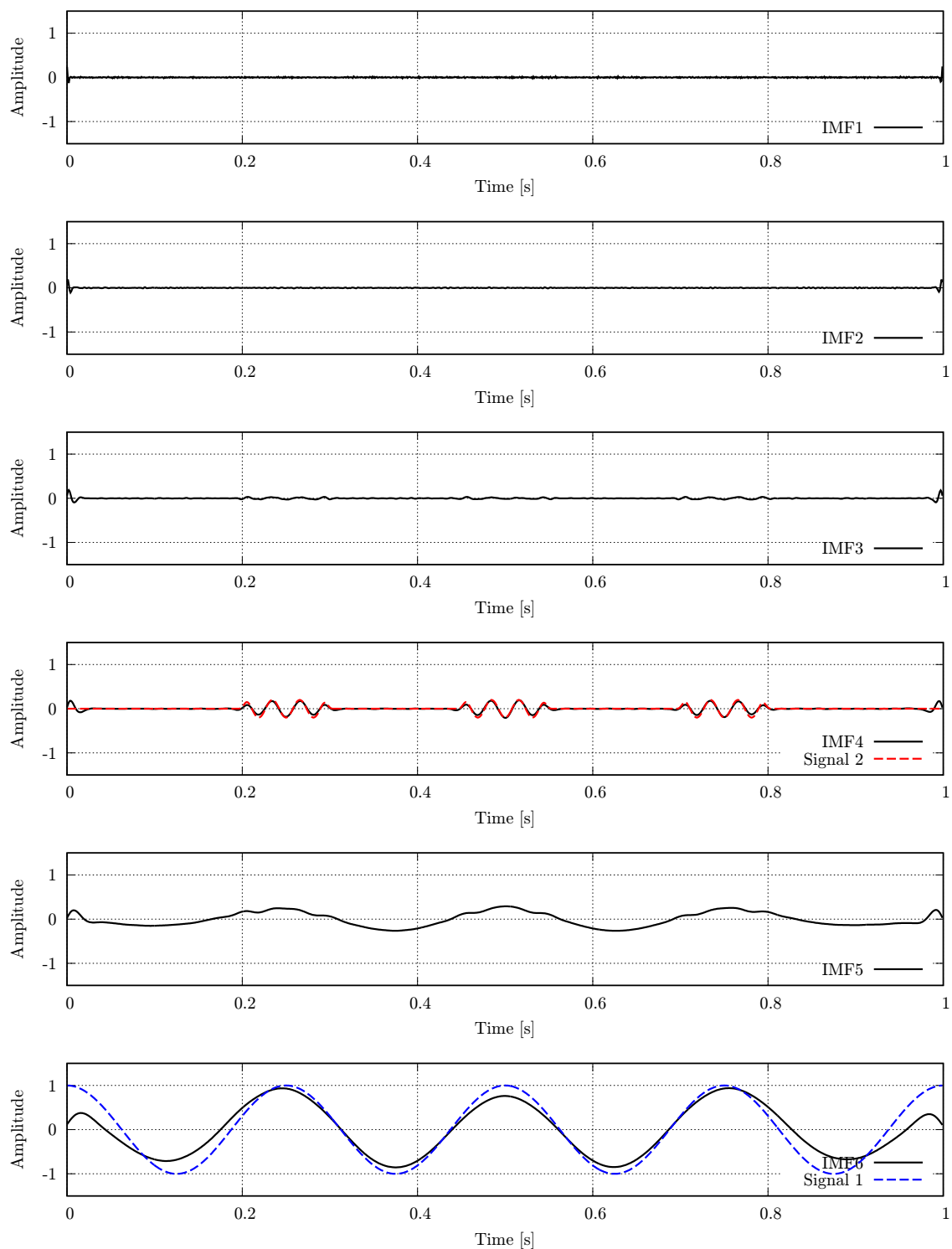


図 7: 図 4(c) の波形を  $N_e = 100$  で EEMD したときの結果 ( $\sigma_e = 0.1$ ,  $\epsilon_e = 10^{-4}$ )。

## 5 ガウスノイズに対する HHT の統計的性質

前章で HHT の定義や性質について述べた。HHT は周波数成分の時間発展を調べたり、状態の変化を検知したりする研究への応用が進められている。重力波の観測データは信号に比べてノイズのほうが強く、また、観測運転中はいつ重力波が入射してきてもいいように常時データの取得は行うことになり、ノイズしか含まれない観測データを扱う場面が多く存在する。したがって、重力波のデータ解析へ HHT を応用することを検討するにあたって、ノイズに対する HHT の性能を評価しておくことは重要である。本章では、ガウスノイズに対して、まず瞬時振幅や瞬時周波数といったものが解析的にどのように扱うことができるか検討を行った結果を報告する。その後、HHT をかけて得られた各 IMF の瞬時振幅や瞬時周波数について、区間平均をあつかったときのその統計的な性質について評価を行う。最後に、そこで得られた知見を異常検知の枠組みに応用するプロトコルを提唱し、その検証を行う。

### 5.1 ガウスノイズの Hilbert 変換

実信号  $s(t)$  がガウス分布  $N(0, \sigma^2)$  に従うランダム白色ガウスノイズの場合の  $s_I(t) = \mathcal{H}[s(t)]$  を考える。まず一般的に、 $s(t)$  の解析信号  $z(t)$  の定義より、

$$\tilde{z}(f) = \begin{cases} 2\tilde{s}(f), & (f \geq 0) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.1)$$

である。一方で、 $z(t) = s(t) + i s_I(t)$  をフーリエ変換すると、

$$\tilde{z}(f) = \tilde{s}(f) + i \tilde{s}_I(f) \quad (5.2)$$

が得られる。これら 2 つより、

$$\tilde{s}_I(f) = \begin{cases} -i\tilde{s}(f) = \text{Im}[\tilde{s}(f)] - i\text{Re}[\tilde{s}(f)], & (f \geq 0) \\ i\tilde{s}(f) = -\text{Im}[\tilde{s}(f)] + i\text{Re}[\tilde{s}(f)], & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (5.3)$$

が成り立つことがわかる。これを使って、 $s(t)$  と  $s_I(t)$  の内積を計算すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t) s_I(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{s}(f) e^{i2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{s}_I(f') e^{i2\pi f't} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{s}(f) \tilde{s}_I(f') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i2\pi(f+f')t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{s}(f) \tilde{s}_I(f') \delta(f+f') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{s}(f) \tilde{s}_I(-f) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{s}(f) \tilde{s}_I^*(f) \\ &= -i \int_{-\infty}^0 df \tilde{s}(f) \tilde{s}^*(f) + i \int_0^{\infty} df \tilde{s}(f) \tilde{s}^*(f) \\ &= -i \int_0^{\infty} df \tilde{s}(-f) \tilde{s}^*(-f) + i \int_0^{\infty} df \tilde{s}(f) \tilde{s}^*(f) \\ &= -i \int_0^{\infty} df \tilde{s}^*(f) \tilde{s}(f) + i \int_0^{\infty} df \tilde{s}(f) \tilde{s}^*(f) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

となるので、一般に  $s(t)$  と  $s_I(t)$  は直交することがわかる。

$s(t)$  は正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従う白色ガウスノイズであるとしているので、 $\sigma$  が周波数依存性を持たない。したがって、そのパワースペクトラム密度  $P(f)$  は

$$P(f) = \sigma^2 \quad (5.5)$$

である。ここで、パワースペクトラム密度に関する次の公式

$$\langle \tilde{s}^*(f') \tilde{s}(f) \rangle = P(f) \delta(f - f') \quad (5.6)$$

において、 $f = f'$  のとき（離散的に考えて  $\delta(0) = 1$  とする）、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle \tilde{s}^*(f) \tilde{s}(f) \rangle \\ &= \langle |\tilde{s}(f)|^2 \rangle \\ &= \langle \text{Re}[\tilde{s}(f)]^2 \rangle + \langle \text{Im}[\tilde{s}(f)]^2 \rangle \end{aligned} \quad (5.7)$$

という関係が得られる。フーリエ変換の実部と虚部はそれぞれ原信号  $s(t)$  の偶関数成分と奇関数成分に対応しており、ガウスノイズにおいては独立に考えてよい。したがって、

$$\langle \text{Re}[\tilde{s}(f)^2] \rangle = \langle \text{Im}[\tilde{s}(f)^2] \rangle = \frac{\sigma^2}{2} \quad (5.8)$$

となる。そして  $\langle s(t) \rangle = 0$  より、

$$\langle \tilde{s}(f) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle s(t) \rangle e^{-i2\pi ft} = 0 \quad (5.9)$$

つまり、

$$\langle \text{Re}[\tilde{s}(f)] \rangle = \langle \text{Im}[\tilde{s}(f)] \rangle = 0 \quad (5.10)$$

であるから、 $\text{Re}[\tilde{s}(f)]$  と  $\text{Im}[\tilde{s}(f)]$  はそれぞれ独立に  $N(0, \sigma^2/2)$  に従うガウスノイズである。逆に言うと、 $\text{Re}[\tilde{s}(f)]$  と  $\text{Im}[\tilde{s}(f)]$  がそれぞれ独立に  $N(0, \sigma^2/2)$  に従うガウスノイズであれば、 $s(f)$  は  $N(0, \sigma^2)$  に従うガウスノイズとなる。これらを前提として、 $\text{Re}[\tilde{s}_I(f)]$  と  $\text{Im}[\tilde{s}_I(f)]$  を考えると、

$$\text{Re}[\tilde{s}_I(f)] = \begin{cases} \text{Im}[\tilde{s}(f)], & (f \geq 0), \\ -\text{Im}[\tilde{s}(f)], & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\text{Im}[\tilde{s}_I(f)] = \begin{cases} -\text{Re}[\tilde{s}(f)], & (f \geq 0), \\ \text{Re}[\tilde{s}(f)], & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (5.12)$$

であるから、これらも  $N(0, \sigma^2/2)$  に従うガウスノイズである。したがって、 $s_I(t)$  は  $N(0, \sigma^2)$  に従うガウスノイズである。

一般に、無相関なガウスノイズは独立であることが知られている。また、直交しているデータ同士は無相関であることも知られているため、以上をまとめると、 $s_I(t)$  は  $s(t)$  と同じ分布に従い、かつ互いに独立なガウスノイズであることがわかった。

離散の場合を考えればより直感的にこの関係が理解できる。離散 Hilbert 変換のインパルス応答を  $h[n]$  とすると、

$$\begin{aligned} h[n] &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right), & (n \neq 0) \\ 0, & (n = 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & (n \text{ is odd}) \\ 0, & (n \text{ is even}) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

であるので、IIR フィルタの形式で表現すると

$$\begin{aligned}
 s_I[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]s[n-k] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (h[2m]s[n-2m] + h[2m+1]s[n-2m-1]) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)\pi} s[n-2m-1]
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

となる。 $s[n]$  は白色ガウスノイズを仮定しているので、異なるデータ点間で独立である。 $s_I[n]$  の式の中に  $s[n]$  は含まれず、 $s[n]$  と独立な成分しか含まれないため、 $s_I[n]$  と  $s[n]$  が独立であることがわかる。また、 $s_I[n]$  は  $N(0, h[2m+1]^2\sigma^2)$  に従う独立なガウスノイズの  $m = -\infty$  から  $m = \infty$  までの重ね合わせであり、その分散  $\text{Var}[s_I[n]]$  は

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[s_I[n]] &= \sigma^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2}{(2m+1)\pi} \right)^2 \\
 &= \frac{4\sigma^2}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \\
 &= \frac{8\sigma^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \\
 &= \frac{8\sigma^2}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{8} \\
 &= \sigma^2
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

となるため、 $s_I[n]$  は  $N(0, \sigma^2)$  に従うガウスノイズであることもわかる。途中の級数の値は  $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$  を既知として、

$$\begin{aligned}
 2^2\zeta(2) &= \frac{2\pi^2}{3} = \frac{2^2}{1^2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2}{4^2} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^2}{6^2} + \dots \\
 &= \frac{2^2}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \\
 &= \zeta(2) + 2^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{2^2} \left( \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{8} \tag{5.17}$$

のようにして得られる。

式 (5.14) から  $s_I[n]$  と  $s[n]$  が独立であることと同時に、 $s_I[n+1]$  や  $s_I[n-1]$  と  $s[n]$  は独立ではないこともわかる。この事実は後に瞬時周波数の分布を考える時に重要となる。

実際に標準偏差  $\sigma = 1.0$  の白色ガウスノイズ  $s[n]$  を標本化周波数  $f_s = 4096$  Hz で 10 秒生成し、その Hilbert 変換  $s_I[n]$  のヒストグラムを調べた。図 8(a) に生成した白色ガウスノイズ  $s[n]$  のヒストグラムを、図 8(a) にその Hilbert 変換  $s_I[n]$  のヒストグラムを示す。それぞれにプロットした青破線は  $N(0, \sigma^2)$  のガウス分布の確率密度関数であり、2 つが同一のガウス分布に従っていることがわかる。また、図 9 は  $s[n]$  と  $s_I[n]$  の散布図である。この図から、 $s[n]$  と  $s_I[n]$  は無相関であることもわかる。

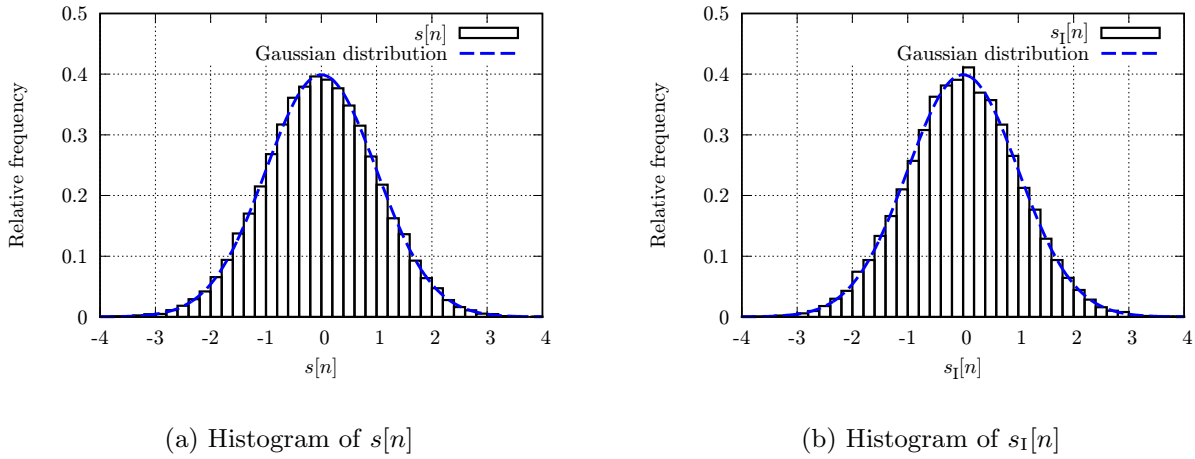


図 8:  $s[n]$  と  $s_I[n]$  のヒストグラム。それぞれ同一のガウス分布に従っていることがわかる

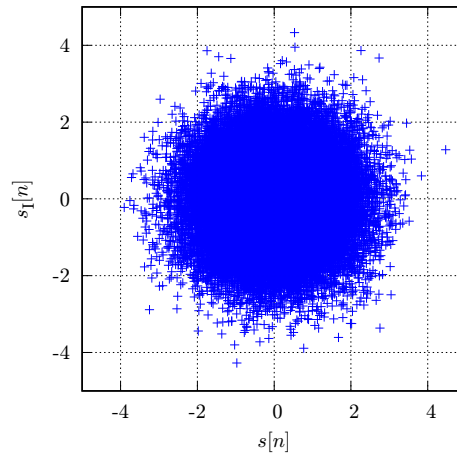


図 9:  $s[n]$  と  $s_I[n]$  の散布図。無相関であることがわかる。

## 5.2 ガウスノイズの瞬時振幅と瞬時周波数

引き続き離散の場合について、 $s[n]$  が  $N(0, \sigma^2)$  に従うガウスノイズだとして、その瞬時振幅  $a[n]$  と瞬時周波数  $f[n]$  の従う分布を考えていく。 $s[n]$  の確率変数を  $X$ 、 $s_I[n] = \mathcal{H}[s[n]]$  の確率変数を  $X_I$  とする。

瞬時振幅の分布を考えるために  $s[n]^2$  の分布から考える。 $s[n]^2$  の確率変数を  $Y$  とすると  $Y = X^2$  であるから、 $0 \leq Y \leq y$  となる確率  $P(0 \leq Y \leq y)$  は、

$$\begin{aligned}
 P(0 \leq Y \leq y) &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\
 &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \\
 &= \int_0^{\sqrt{y}} dx \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

ここで、 $y' = x^2$  とおくと、 $dy' = 2xdx$  つまり  $dx = dy'/(2\sqrt{y})$  であるから

$$P(0 \leq Y \leq y) = \int_0^y dy' \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'}} \exp\left(-\frac{y'}{2\sigma^2}\right) \quad (5.19)$$

となる。したがって、 $Y$  の確率密度関数  $p_Y(y)$  は

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{d}{dy} P(0 \leq Y \leq y) \\ &= \frac{d}{dy} \int_0^y dy' \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y'}} \exp\left(-\frac{y'}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

である。 $\sigma = 1$  のとき、自由度 1 の  $\chi^2$  分布と等しい。 $s_I[n]^2$  の確率変数を  $Y_I$  とすると、同様に

$$p_{Y_I}(y_I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y_I}} \exp\left(-\frac{y_I}{2\sigma^2}\right) \quad (5.21)$$

である。

続いて  $s[n]^2 + s_I[n]^2$  の分布を考える。この確率変数を  $Q$  とすると  $Q = Y + Y_I$  なので、 $Q$  の確率密度関数  $p_Q(q)$  は

$$\begin{aligned} p_Q(q) &= \int_0^q dy p_Y(y) p_{Y_I}(q-y) \\ &= \int_0^q dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 y} \sqrt{2\pi\sigma^2 (q-y)}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2} - \frac{q-y}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) \int_0^q dy \frac{1}{\sqrt{y(q-y)}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) \int_0^q dy \frac{1}{\sqrt{-(y-q/2)^2 + q^2/4}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) \frac{2}{q} \int_0^q dy \frac{1}{\sqrt{1 - (2y/q - 1)^2}}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

ここで、 $u = 2y/q - 1$  とすると  $dy = qdu/2$  であり

$$\begin{aligned} p_Q(q) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) \int_{-1}^{+1} du \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) [\arcsin u]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

となる。これは母数（期待値の逆数） $\lambda = 1/2\sigma^2$  の指数分布である。

これまでの結果を使って、いよいよ瞬時振幅  $a[n] = \sqrt{s[n]^2 + s_I[n]^2}$  の分布を考える。 $a[n]$  の確率変数



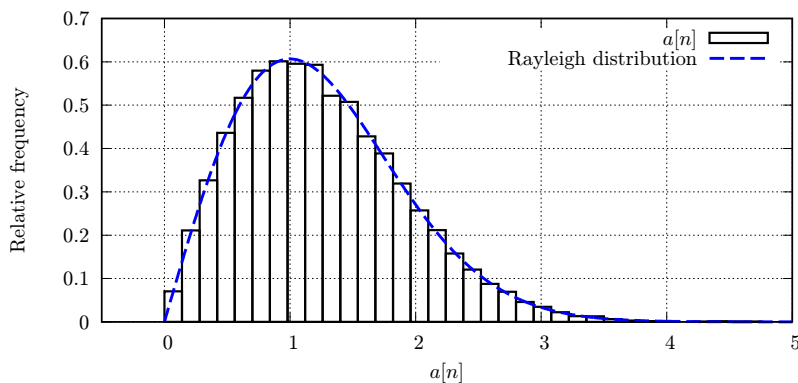


図 10:  $a[n]$  のヒストグラムと式 (5.25) のレイリー分布の確率密度関数

を  $A$  とすると  $A = \sqrt{Q}$  であるから,  $0 \leq A \leq a$  となる確率  $P(0 \leq A \leq a)$  は

$$\begin{aligned}
 P(0 \leq A \leq a) &= \int_0^{a^2} dq p_Q(q) \\
 &= \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{a^2} dq \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2\sigma^2} \left[ -2\sigma^2 \exp\left(-\frac{q}{2\sigma^2}\right) \right]_0^{a^2} \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

となるので,  $A$  の確率密度関数  $p_A(a)$  は

$$\begin{aligned}
 p_A(a) &= \frac{d}{da} P(0 \leq A \leq a) \\
 &= \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

となるのがわかる。これは母数 (最頻値)  $\sigma$  のレイリー分布である。このようにして, 瞬時振幅の従う分布を得ることができた。

図 8 を作る際に用いたデータを使って瞬時振幅のヒストグラムを作ったものが図 10 である。図中の青破線は式 (5.25) のレイリー分布であり, 非常によく一致しているのがわかる。

続いて瞬時周波数  $f[n]$  について考察していく。 $f[n]$  は  $s[n]$  と  $s_I[n]$  と瞬時振幅  $a[n]$  を使って,

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \frac{s[n]\dot{s}_I[n] - \dot{s}[n]s_I[n]}{a[n]^2} \tag{5.26}$$

と表すことができる。 $\dot{s}[n]$  と  $\dot{s}_I[n]$  はそれぞれ  $s[n]$  と  $s_I[n]$  の時間微分であり, ひとまず 2 点差分で考えると,

$$\dot{s}[n] = \frac{s[n+1] - s[n-1]}{2\Delta t}, \quad \dot{s}_I[n] = \frac{s_I[n+1] - s_I[n-1]}{2\Delta t} \tag{5.27}$$

である。 $\Delta t$  はサンプリング間隔である。ここで, 式 (5.14) より,  $s_I[n+1]$  や  $s_I[n-1]$  と  $s[n]$  は相関があることがわかっているため, 瞬時振幅の分布を求めるときのように確率変数の独立を仮定しての式変形を行うことはできない。また, もちろん  $a[n]$  と  $s[n]$ ,  $s_I[n]$  も独立ではない。そして実際には離散 Hilbert

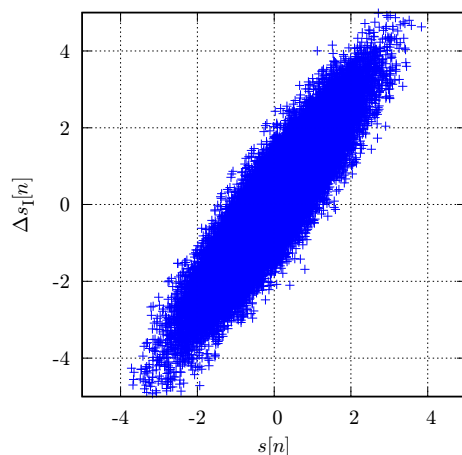


図 11:  $s[n]$  と  $\Delta s_I[n] = s_I[n+1] - s_I[n-1]$  の散布図

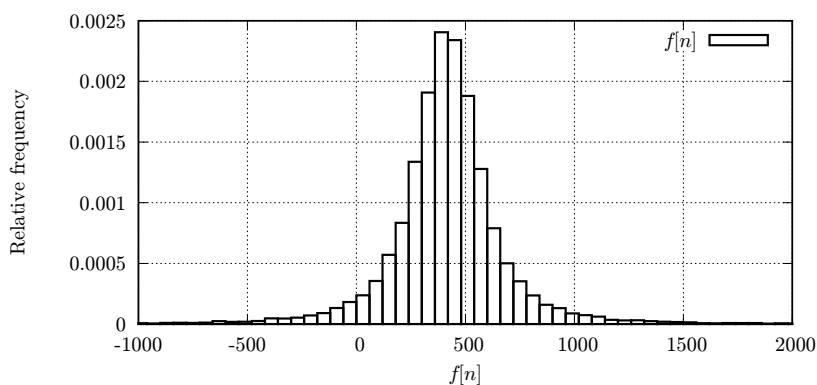


図 12:  $f[n]$  のヒストグラム

変換のフィルタ次数や、数値微分の精度にも依存する。これらの理由から、 $f[n]$  の分布について少なくとも閉じた式を得ることは不可能である。

図 8 のデータで、 $s[n]$  と  $\Delta s_I[n] = s_I[n+1] - s_I[n-1]$  との散布図を作ったものが図 11 である。確かに相関を持っていることがわかる。また、そのデータで  $f[n]$  のヒストグラムを書いたものが図 12 である。ガウス分布に比べて尖度が高く、裾の長い分布であることがわかる。

また、瞬時振幅  $a[n]$  についても、 $a[n+1]$  には  $s_I[n+1]$  が含まれているため、 $a[n+1]$  と  $s[n]$  には相関があり、つまり  $a[n+1]$  と  $a[n]$  は独立ではない。したがって、瞬時振幅の和や時間平均などに関しても閉じた式を得ることはできない。

### 5.3 ピアソン分布族

正規分布（ガウス分布）は平均と分散の2つのパラメータによって一意に決まる分布である。正規分布は歪度や尖度など3次以上のモーメントがゼロであるという性質があるため、歪度や尖度を持つ分布を正規分布でフィッティングしても、正しく一致できない。歪度や尖度を持つ確率分布として $\chi^2$ 分布やベータ分布などが知られている。複数ある分布の中から適切なものを選ぶには背景にある確率モデルに対して何らかの仮定を置く必要があるため扱いが難しいのだが、これらの分布を包括して扱う分布族の理論としてピアソン分布族というものが知られている [33, 34]。ピアソン分布族は歪度や尖度が無視できないような統計を扱う際に応用されている [35, 36]。ここではピアソン分布族について述べる。

ピアソン分布族は確率密度関数  $p(x)$  が微分方程式

$$\frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \quad (5.28)$$

を満たす確率分布の族である。まずは係数  $a, b_0, b_1, b_2$  が満たす性質を見ていく。上式を変形すると

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2) \frac{dp(x)}{dx} = (x+a)p(x) \quad (5.29)$$

となり、両辺に  $x^n$  ( $n \geq 0$ ) をかけて積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (b_0x^n + b_1x^{n+1} + b_2x^{n+2}) \frac{dp(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x^{n+1} + ax^n)p(x) \quad (5.30)$$

である。ここで、 $x$  の関数  $g(x)$  の期待値を

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x)p(x) \quad (5.31)$$

と書くこととすると、式 (5.30) の右辺の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (x^{n+1} + ax^n)p(x) = E[x^{n+1}] + aE[x^n] \quad (5.32)$$

となる。一方、式 (5.30) の左辺は部分積分によって計算でき、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx (b_0x^n + b_1x^{n+1} + b_2x^{n+2}) \frac{dp(x)}{dx} \\ &= [(b_0x^n + b_1x^{n+1} + b_2x^{n+2})p(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \{nb_0x^{n-1} + (n+1)b_1x^n + (n+2)b_2x^{n+1}\}p(x) \\ &= -nb_0E[x^{n-1}] - (n+1)b_1E[x^n] - (n+2)b_2E[x^{n+1}] \end{aligned} \quad (5.33)$$

となる。確率密度関数  $p(x)$  は有限区間でしか値を持ちえないため、表面積分は0となることを用いた。ここで、原点まわりの  $n$  次モーメント  $m_n$  を導入する。つまり、

$$m_n = E[x^n] \quad (5.34)$$

である。ここまでの結果より、式 (5.30) から

$$-nb_0m_{n-1} - (n+1)b_1m_n - (n+2)b_2m_{n+1} = m_{n+1} + am_n \quad (5.35)$$

$$\iff nb_0m_{n-1} + \{a + (n+1)b_1\}m_n + \{1 + (n+2)b_2\}m_{n+1} = 0 \quad (5.36)$$

という、ピアソン分布族におけるモーメントに関する漸化式が得られる。 $n = 0, 1, 2, 3$  を代入してそれぞれの場合の式を得ると、 $m_0 = 1$  に注意して、

$$(a + b_1) + (2b_2 + 1)m_1 = 0 \quad (5.37)$$

$$b_0 + (a + 2b_1)m_1 + (3b_2 + 1)m_2 = 0 \quad (5.38)$$

$$2b_0m_1 + (a + 3b_1)m_2 + (4b_2 + 1)m_3 = 0 \quad (5.39)$$

$$3b_0m_2 + (a + 4b_1)m_3 + (5b_2 + 1)m_4 = 0 \quad (5.40)$$

となる。これより、ピアソン分布族の満たす微分方程式を決定する係数  $a, b_0, b_1, b_2$  は 4 次までのモーメントによって表されることがわかった。

ここで特に  $m_1 = 0$  の場合を考える。期待値が 0 以外の場合には元の確率変数  $z$  を期待値  $\mu_1$  の分だけ平行移動させた新たな確率変数  $x = z - \mu_1$  を考えているということである。この場合、 $z$  の  $n$  次モーメント、つまり  $x$  の  $n$  次中心モーメントを  $\mu_n$  とすれば、 $m_1 = 0, m_r = \mu_r$  ( $r = 2, 3, \dots$ ) であるので、先の式は、

$$a + b_1 = 0 \quad (5.41)$$

$$b_0 + (3b_2 + 1)\mu_2 = 0 \quad (5.42)$$

$$(a + 3b_1)\mu_2 + (4b_2 + 1)\mu_3 = 0 \quad (5.43)$$

$$3b_0\mu_2 + (a + 4b_1)\mu_3 + (5b_2 + 1)\mu_4 = 0 \quad (5.44)$$

という形となる。単なる 3 元連立方程式なので過程は省略すると、

$$a = -b_1 = \frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} \quad (5.45)$$

$$b_0 = -\frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{A} \quad (5.46)$$

$$b_1 = -\frac{2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3}{A} \quad (5.47)$$

$$A = 10\mu_4\mu_2 - 12\mu_3^2 - 18\mu_2^3 \quad (5.48)$$

となる。あるいは、標準偏差  $\sigma = \sqrt{\mu_2}$ 、歪度  $\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3$ 、尖度  $\beta_2 = \mu_4/\sigma^4$  を用いて

$$a = -b_1 = \frac{\sigma\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{B} \quad (5.49)$$

$$b_0 = -\frac{\sigma^2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{B} \quad (5.50)$$

$$b_1 = -\frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{B} \quad (5.51)$$

$$B = 10\beta_2 - 12\beta_1 - 18 \quad (5.52)$$

と表す式もよく用いられる。

ここまでで、データから得られるモーメントという統計量から、Pearson 分布の確率密度関数が従う微分方程式の係数が得られることがわかった。ここからは、係数が得られたとして実際に微分方程式 (5.28) を解くことで確率密度関数の式の形を見ていく。まず左辺を  $x$  で積分すると

$$\int dx \frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx} = \int dx \frac{d}{dx} (\ln p(x)) = \ln p(x) + C \quad (5.53)$$

となる。 $C$  は定数である。一方、右辺の積分を計算するには分母  $b_0 + b_1x + b_2x^2$  の根によって場合分けをする必要がある。具体的には (1) 異符号の実数根の場合、(2) 同符号の実数根の場合、(3) 共役複素数根

の場合の3通りである。伝統的に (1) はタイプ I, (2) はタイプ VI, (3) はタイプ IV とされている。これらは次の判別式  $K$  を用いて判別される。

$$K = \frac{b_1^2}{4b_0b_2}. \quad (5.54)$$

まず  $b_0 + b_1x + b_2x^2$  の2つの根は

$$\frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_0}, \quad \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2b_0} \quad (5.55)$$

である。(1), (2) の場合は実数根なので  $b_1^2 > 4b_0b_2$  であり, (3) の場合は  $b_1^2 < 4b_0b_2$  である。また, (1) の場合は  $A_1$  と  $A_2$  で符号が異なるので  $|b_1| < \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}$  つまり  $b_0b_2 < 0$  であり, (2) の場合は  $b_0b_2 > 0$  である。以上をまとめると,

- (1) タイプ I  $\iff K < 0$
- (2) タイプ VI  $\iff 1 < K$
- (3) タイプ IV  $\iff 0 < K < 1$

であることがわかる。

### 5.3.1 タイプ I

式 (5.28) の右辺の分母の根が異符号の実数であるので, その2つを  $\alpha_1, \alpha_2$  とし,  $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$  とする。微分方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln p(x)) &= \frac{x+a}{b_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} \\ &= -\frac{1}{b_2} \cdot \frac{\alpha_1+a}{\alpha_2-\alpha_1} \cdot \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{b_2} \cdot \frac{\alpha_2+a}{\alpha_2-\alpha_1} \cdot \frac{1}{x-\alpha_2} \end{aligned} \quad (5.56)$$

となる。ここで,

$$a_1 = -(\alpha_1 + a), \quad a_2 = \alpha_2 + a, \quad (5.57)$$

$$m_1 = \frac{a_1}{b_2(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad m_2 = \frac{a_2}{b_2(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (5.58)$$

とおくと

$$\frac{d}{dx}(\ln p(x)) = \frac{m_1}{x-\alpha_1} - \frac{m_2}{\alpha_2-x} \quad (5.59)$$

となる。右辺2項目は  $x=0$  で分母が正となるように符号を調整した。これを積分すれば,

$$\begin{aligned} \ln p(x) &= m_1 \ln(x-\alpha_1) + m_2 \ln(\alpha_2-x) + C \\ &= \ln \{e^C (x-\alpha_1)^{m_1} (\alpha_2-x)^{m_2}\} \\ &= \ln \{e^C (x+a_1+a)^{m_1} (a_2-a-x)^{m_2}\} \\ &= \ln \left\{ a_1^{m_1} a_2^{m_2} e^C \left(1 + \frac{x+a}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x+a}{a_2}\right)^{m_2} \right\} \end{aligned} \quad (5.60)$$

したがって,  $k_1 = a_1^{m_1} a_2^{m_2} e^C$  とすると

$$p(x) = k_1 \left(1 + \frac{x+a}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x+a}{a_2}\right)^{m_2} \quad (5.61)$$

が得られる。 $x$  の範囲は  $\alpha_1 < x < \alpha_2$  である。 $k_1$  は規格化定数であり、

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx p(x) = 1 \quad (5.62)$$

となるように決めればよい。 $y = x - \alpha_1 = x + a + a_1$ ,  $\beta = \alpha_2 - \alpha_1 = a_1 + a_2$  とおいて実際に計算してみると

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 \int_0^{\beta} dy \left(\frac{y}{a_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\beta - y}{a_2}\right)^{m_2} \\ &= k_1 a_1^{-m_1} a_2^{-m_2} \beta^{m_1+m_2} \int_0^{\beta} dy \left(\frac{y}{\beta}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{y}{\beta}\right)^{m_2} \\ &= k_1 a_1^{-m_1} a_2^{-m_2} \beta^{m_1+m_2+1} \int_0^1 du u^{m_1} (1-u)^{m_2} \\ &= k_1 a_1^{-m_1} a_2^{-m_2} \beta^{m_1+m_2+1} B(m_1+1, m_2+1) \end{aligned} \quad (5.63)$$

となる。 $B(x, y)$  はベータ関数であり、

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \quad (5.64)$$

と定義される。第 2 等号は  $u = t/(1-t)$  と変数変換すれば得られる。したがって、

$$k_1 = \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}{(a_1 + a_2)^{m_1+m_2+1} B(m_1+1, m_2+1)} \quad (5.65)$$

が得られ、確率密度関数の式は

$$p_1(x) = \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}{(a_1 + a_2)^{m_1+m_2+1} B(m_1+1, m_2+1)} \left(1 + \frac{x+a}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x+a}{a_2}\right)^{m_2} \quad (5.66)$$

という形になることがわかる。また、式 (5.63) の途中で用いた  $u = y/\beta = (x+a+a_1)/(a_1+a_2)$  を用いると

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{dx}{du} p(x) \\ &= (a_1 + a_2) \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}{(a_1 + a_2)^{m_1+m_2+1} B(m_1+1, m_2+1)} \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1}\right)^{m_1} \left(\frac{a_1 + a_2}{a_2} (1-u)\right)^{m_2} \\ &= \frac{1}{B(m_1+1, m_2+1)} u^{m_1} (1-u)^{m_2} \end{aligned} \quad (5.67)$$

となる。これはベータ分布である ( $0 < u < 1$ )。すなわち、Pearson 分布 Type I はベータ分布を一般化した分布であるといえる。

なお、 $\mu_1$  で平行移動する前の確率変数  $z = x + \mu_1$  についての確率密度関数の式は

$$p(z) = k_1 \left(1 + \frac{z - \mu_1 + a}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{z - \mu_1 + a}{a_2}\right)^{m_2} \quad (5.68)$$

である。

## 5.3.2 タイプ IV

式 (5.28) の右辺の分母の根が共役複素数であるので、それを  $\lambda_0 \pm i\lambda_1$  ( $\lambda_1 > 0$ ) とする。つまり、

$$\lambda_0 = -\frac{b_1}{2b_2}, \quad \lambda_1^2 = \frac{4b_0b_2 - b_1^2}{(2b_2)^2} = \frac{b_0}{b_2} - \frac{b_1^2}{4b_2^2} \quad (5.69)$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} b_0 + b_1x + b_2x^2 &= b_2(x - \lambda_0 - i\lambda_1)(x - \lambda_0 + i\lambda_1) \\ &= b_2((x - \lambda_0)^2 + \lambda_1^2) \\ &= b_2(X^2 + \lambda_1^2) \end{aligned} \quad (5.70)$$

である。ここで  $X = x - \lambda_0$  とした。これを使って微分方程式を積分すると

$$\begin{aligned} \int dx \frac{d}{dx} (\ln p(x)) &= \int dX \frac{X + \lambda_0 + a}{b_2(X^2 + \lambda_1^2)} \\ &= \frac{1}{b_2} \int dX \frac{X}{X^2 + \lambda_1^2} + \frac{\lambda_0 + a}{b_2} \int dX \frac{1}{X^2 + \lambda_1^2} \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \ln p(x) &= \frac{1}{2b_2} \ln(X^2 + \lambda_1^2) + \frac{\lambda_0 + a}{b_2\lambda_1} \arctan\left(\frac{X}{\lambda_1}\right) + C \\ &= \ln \left\{ 1 + \left(\frac{X}{\lambda_1}\right)^2 \right\}^{1/(2b_2)} + \frac{\lambda_0 + a}{b_2\lambda_1} \arctan\left(\frac{X}{\lambda_1}\right) + \frac{1}{b_2} \ln \lambda_1 + C \\ &= \ln \left[ \lambda_1^{1/b_2} e^C \left\{ 1 + \left(\frac{X}{\lambda_1}\right)^2 \right\}^{1/(2b_2)} \exp \left\{ \frac{\lambda_0 + a}{b_2\lambda_1} \arctan\left(\frac{X}{\lambda_1}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.72)$$

となるので、

$$k_4 = \lambda_1^{1/b_2} e^C, \quad m = -\frac{1}{2b_2}, \quad v = -\frac{\lambda_0 + a}{b_2\lambda_1} \quad (5.73)$$

とすれば

$$p_4(x) = k_4 \left\{ 1 + \left(\frac{x - \lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 \right\}^{-m} \exp \left\{ -v \arctan\left(\frac{x - \lambda_0}{\lambda_1}\right) \right\} \quad (5.74)$$

という式が得られる。 $k_4$  は

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) \\ &= k_4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 1 + \left(\frac{x - \lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 \right\}^{-m} \exp \left\{ -v \arctan\left(\frac{x - \lambda_0}{\lambda_1}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.75)$$

を満たすように決めればよい。 $y = (x - \lambda_0)/\lambda_1$  とおけば

$$1 = k_4 \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy (1 + y^2)^{-m} \exp(-v \arctan y) \quad (5.76)$$

さらに  $y = \tan \theta$  とおけば

$$\begin{aligned} 1 &= k_4 \lambda_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\cos^2 \theta} (1 + \tan^2 \theta)^{-m} e^{-v\theta} \\ &= k_4 \lambda_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{2(m-1)} e^{-v\theta} \end{aligned} \quad (5.77)$$

となる。ここで、

$$F(m, v) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{2(m-1)} e^{-v\theta} \quad (5.78)$$

とすれば、

$$k_4 = \frac{1}{\lambda_1 F(m, v)} \quad (5.79)$$

である。また、Nielsen らによる  $\Gamma$  関数の性質

$$\int_0^\pi d\varphi (\sin \varphi)^{x-1} e^{-y\varphi} = \frac{\pi \Gamma(x) e^{-\pi y/2}}{2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x+iy+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x-iy+1}{2}\right)} \quad (5.80)$$

において、 $\varphi = \pi/2 - \theta$  とすると

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{x-1} e^{-y(\pi/2-\theta)} = \frac{\pi \Gamma(x) e^{-\pi y/2}}{2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x+iy+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x-iy+1}{2}\right)} \quad (5.81)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta (\cos \theta)^{x-1} e^{y\theta} = \frac{\pi \Gamma(x)}{2^{x-1} \Gamma\left(\frac{x+iy+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x-iy+1}{2}\right)} \quad (5.82)$$

が得られるので、

$$F(m, r) = \frac{\pi \Gamma(2m-1)}{2^{2m-2} \Gamma(m+iv/2) \Gamma(m-iv/2)} \quad (5.83)$$

であることがわかる。したがって  $k_4$  の計算は、

$$k_4 = \frac{2^{2m-2} \Gamma(m+iv/2) \Gamma(m-iv/2)}{\pi \lambda_1 \Gamma(2m-1)} \quad (5.84)$$

とすればよい。Heinrich らによって計算機上でこの計算を行う工夫がまとめられている。

### 5.3.3 タイプ VI

式 (5.28) の右辺の分母の根が同符号の実数であるので、その 2 つを  $\alpha_1, \alpha_2$  とし、 $\alpha_1 < \alpha_2$  とする。微分方程式はタイプ I のときと同様に

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\ln p(x)) &= \frac{x+a}{b_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} \\ &= -\frac{1}{b_2} \cdot \frac{\alpha_1+a}{\alpha_2-\alpha_1} \cdot \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{b_2} \cdot \frac{\alpha_2+a}{\alpha_2-\alpha_1} \cdot \frac{1}{x-\alpha_2} \end{aligned} \quad (5.85)$$

となり、ここでは

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1+a}{b_2\beta}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2+a}{b_2\beta} \quad (5.86)$$

とおく。すると

$$\frac{d}{dx} (\ln p(x)) = -\gamma_1 \frac{1}{x-\alpha_1} + \gamma_2 \frac{1}{x-\alpha_2} \quad (5.87)$$



となる。前述したように、 $p(x)$  は  $x = 0$  で値を持つ必要があるので、積分する際には  $\alpha_1, \alpha_2$  の符号によって場合分けする必要がある。まず  $\alpha_1, \alpha_2$  が正の場合に積分すると

$$\begin{aligned}\ln p(x) &= -\gamma_1 \ln(\alpha_1 - x) + \gamma_2 \ln(\alpha_2 - x) + C \\ &= \ln \{e^C (\alpha_1 - x)^{-\gamma_1} (\alpha_2 - x)^{\gamma_2}\}\end{aligned}\quad (5.88)$$

$$p(x) = e^C (\alpha_1 - x)^{-\gamma_1} (\alpha_2 - x)^{\gamma_2} \quad (5.89)$$

となる。ここで、 $y = \alpha_1 - x$  を導入して  $k_6 = e^C$  とおくと、

$$p(y) = k_6 y^{-\gamma_1} (\beta + y)^{\gamma_2} \quad (5.90)$$

となる。 $x < \alpha_1 < \alpha_2$  であるから  $y > 0$  である。したがって  $k_6$  は

$$\int_0^{\infty} dy p(y) = 1 \quad (5.91)$$

となるように決めればよい。 $p(y)$  の式を入れると、

$$\begin{aligned}1 &= k_6 \int_0^{\infty} dy y^{-\gamma_1} (\beta + y)^{\gamma_2} \\ &= k_6 \beta^{\gamma_2 - \gamma_1} \int_0^{\infty} dy \left(\frac{y}{\beta}\right)^{-\gamma_1} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\gamma_2} \\ &= k_6 \beta^{\gamma_2 - \gamma_1 + 1} \int_0^{\infty} du u^{-\gamma_1} (1 + u)^{\gamma_2} \\ &= k_6 \beta^{\gamma_2 - \gamma_1 + 1} \int_0^{\infty} du \frac{u^{-\gamma_1}}{(1 + u)^{-\gamma_2}} \\ &= k_6 \beta^{\gamma_2 - \gamma_1 + 1} B(-\gamma_1 + 1, -\gamma_2 + \gamma_1 - 1)\end{aligned}\quad (5.92)$$

となる。したがって、

$$k_6 = \frac{\beta^{-\gamma_2 + \gamma_1 - 1}}{B(-\gamma_1 + 1, -\gamma_2 + \gamma_1 - 1)} \quad (5.93)$$

であり、 $p(y)$  の式に入れれば、

$$\begin{aligned}p(y) &= \frac{\beta^{-\gamma_2 + \gamma_1 - 1}}{B(-\gamma_1 + 1, -\gamma_2 + \gamma_1 - 1)} y^{-\gamma_1} (\beta + y)^{\gamma_2} \\ &= \frac{1}{\beta B(-\gamma_1 + 1, -\gamma_2 + \gamma_1 - 1)} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{-\gamma_1} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{\gamma_2}\end{aligned}\quad (5.94)$$

という形が得られる。

次に、 $\alpha_1, \alpha_2$  が負の場合は

$$\begin{aligned}\ln p(x) &= -\gamma_1 \ln(x - \alpha_1) + \gamma_2 \ln(x - \alpha_2) + C \\ &= \ln \{e^C (x - \alpha_1)^{-\gamma_1} (x - \alpha_2)^{\gamma_2}\}\end{aligned}\quad (5.95)$$

$$p(x) = e^C (x - \alpha_1)^{-\gamma_1} (x - \alpha_2)^{\gamma_2} \quad (5.96)$$

となる。ここで、 $y = x - \alpha_2$  を導入して  $k_6 = e^C$  とおくと、

$$p(y) = k_6 (y + \beta)^{-\gamma_1} y^{\gamma_2} \quad (5.97)$$

となる。  $x > \alpha_2 > \alpha_1$  であるから  $y > 0$  である。  $k_6$  を求めるために積分を実行すると、

$$\begin{aligned} 1 &= k_6 \int_0^{\infty} dy (y + \beta)^{-\gamma_1} y^{\gamma_2} \\ &= k_6 \beta^{\gamma_2 - \gamma_1 + 1} \int_0^{\infty} du (1 + u)^{-\gamma_1} u^{\gamma_2} \\ &= k_6 \beta^{\gamma_2 - \gamma_1 + 1} B(\gamma_2 + 1, \gamma_1 - \gamma_2 - 1) \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$k_6 = \frac{\beta^{\gamma_1 - \gamma_2 - 1}}{B(\gamma_2 + 1, \gamma_1 - \gamma_2 - 1)} \quad (5.99)$$

となるので、

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{\beta^{\gamma_1 - \gamma_2 - 1}}{B(\gamma_2 + 1, \gamma_1 - \gamma_2 - 1)} (y + \beta)^{-\gamma_1} y^{\gamma_2} \\ &= \frac{1}{\beta B(\gamma_2 + 1, \gamma_1 - \gamma_2 - 1)} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\gamma_2} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{-\gamma_1} \end{aligned} \quad (5.100)$$

という形が得られる。

式 (5.94) と式 (5.100) を見比べると、

$$\chi_1 = \begin{cases} -\gamma_1 & (\alpha_1, \alpha_2 > 0), \\ \gamma_2 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad \chi_2 = \begin{cases} -\gamma_2 & (\alpha_1, \alpha_2 > 0), \\ \gamma_1 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad y = \begin{cases} \alpha_1 - x & (\alpha_1, \alpha_2 > 0), \\ x - \alpha_2 & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (5.101)$$

とすれば

$$p_6(y) = \frac{1}{\beta B(\chi_1 + 1, \chi_2 - \chi_1 - 1)} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\chi_1} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{-\chi_2} \quad (5.102)$$

となることがわかる。定義域は  $y > 0$  である。

## 5.4 ガウスノイズの瞬時振幅と瞬時周波数の区間平均

ノイズの入った時系列データにおいてデータと比べて高周波なノイズの影響を抑えるための広く用いられている手法に移動平均がある。瞬時振幅や瞬時周波数に関しても移動平均は有効である。これらの移動平均を使った議論に役立てるために、ガウスノイズの瞬時振幅や瞬時周波数のある区間幅で平均した値の従う分布を調べていく。

前々節まではガウスノイズをそのまま Hilbert 変換した場合を考えていたが、ここではより応用面を意識して、ガウスノイズを EMD によって IMF に分解し、各 IMF を Hilbert 変換して瞬時振幅や瞬時周波数を得ることを考える。 $j$  番目の IMF の瞬時振幅を  $IA_j[n]$ 、瞬時周波数を  $IF_j[n]$  とする。瞬時振幅のデータ点  $n$  から区間幅  $L$  での平均を  $a_j[n; L]$ 、瞬時周波数のそれを  $f_j[n; L]$  とすると、

$$a_j[n; L] = \frac{1}{L} \sum_{k=n}^{n+L-1} IA_j[k], \quad f_j[n; L] = \frac{1}{L} \sum_{k=n}^{n+L-1} IF_j[k] \quad (5.103)$$

と表すことができる。5.2 節で議論したように、瞬時振幅や瞬時周波数は別な時刻での値と相関を持つため、これらの区間平均について確率密度関数の閉じた式を得るのは困難である。ここではデータを人工的に作成し、正規分布や Pearson 分布で推定した確率密度関数とヒストグラムを定量的に比較していく。

分布を調べるために標準化周波数  $f_s = 4096$  Hz で長さ  $T = 1$  s のガウスノイズを  $N_{\text{data}} = 6000$  個生成した。ガウスノイズの生成は GSL の `gsl_ran_gaussian` を用いて行い、使用した擬似乱数生成器はメルセンヌツイスターである。 $i$  個目のデータを  $s^{(i)}[n]$  と表し、その  $j$  番目の IMF を  $IMF_j^{(i)}[n]$ 、瞬時振幅と瞬時周波数をそれぞれ  $IA_j^{(i)}[n]$ 、 $IF_j^{(i)}[n]$  と表すこととする。各データのデータ点数を  $N$  とし、平均を取る区間幅を  $L$  とし、以下の量を定義する。

$$N_{\text{seg}} = \lfloor N/L \rfloor, \quad (5.104)$$

$$k_i(n) = (n \bmod N_{\text{seg}}) \times L, \quad (5.105)$$

$$i(n) = \lfloor n/N_{\text{seg}} \rfloor + 1. \quad (5.106)$$

$N_{\text{seg}}$  は区間数、 $k_i(n)$  は  $n$  個目の区間の始まりのデータ点、 $i(n)$  は  $n$  個目の区間で対象とするデータの番号を表す。改めて  $j$  番目の IMF の瞬時振幅と瞬時周波数の区間平均を

$$a_j[n; L] = \frac{1}{L} \sum_{k=k_i(n)}^{k_i(n)+L-1} IA_j^{(i(n))}[k], \quad (5.107)$$

$$f_j[n; L] = \frac{1}{L} \sum_{k=k_i(n)}^{k_i(n)+L-1} IF_j^{(i(n))}[k] \quad (5.108)$$

と定義する。 $0 \leq n \leq N_{\text{seg}} N_{\text{data}}$  である。図 13 に IMF1,4 について  $L = 16$  の場合と  $L = 128$  の場合での  $a_j[n; L]$ 、 $f_j[n; L]$  のヒストグラムをそれぞれ示している。青実線は分布から推定された Pearson 分布の確率密度関数を表し、緑破線は分布の平均値と分散から得られたガウス分布の確率密度関数を表している。これらの図からも、いずれの場合も Pearson 分布を用いることでヒストグラムと一致していることがわかり、ガウス分布では特に裾の部分で一致していないことがわかる。

より定量的に得られたヒストグラムと推定された確率密度関数との一致度を評価するために、二乗平均平方根 (RMSE: root mean squared error) を調べたものを図 14 に示す。図 14(a), (b) は IA と IF についての Pearson 分布での RMSE を、図 14(c), (d) は IA と IF についての Pearson 分布での RMSE とガウス

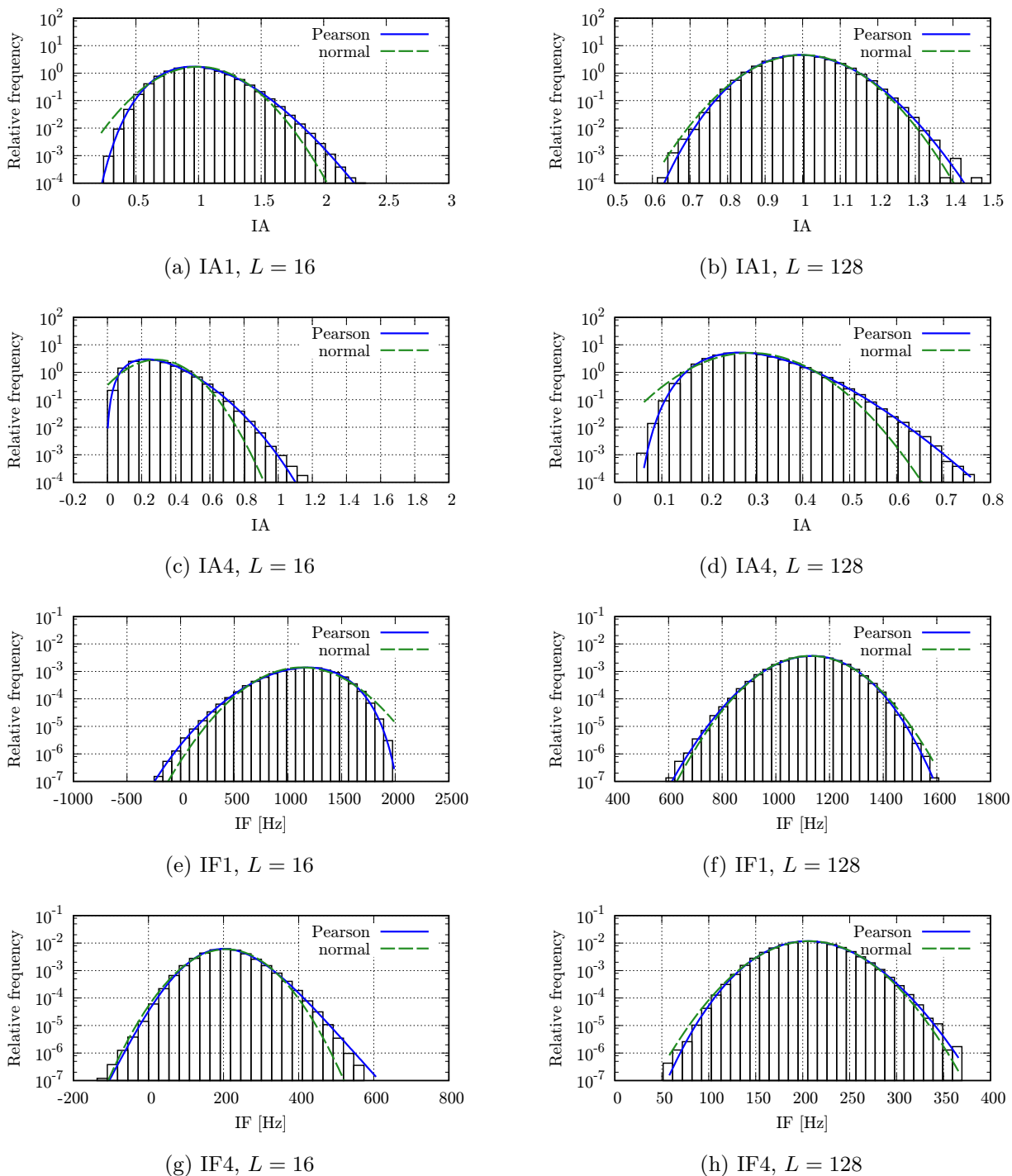
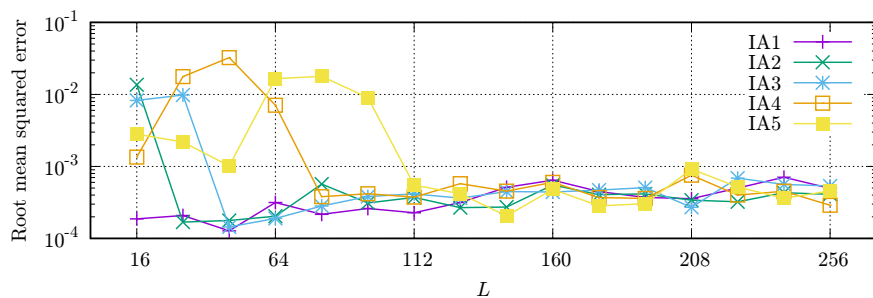
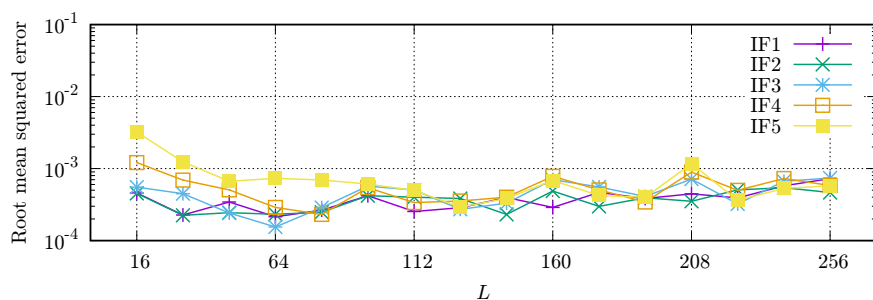


図 13: IA と IF の区間平均のヒストグラム。IMF1 と 4 について区間長を  $L = 16$  と  $L = 128$  にした場合それぞれについて。分布から推定された Pearson 分布の確率密度関数を青実線で、分布の平均値と分散から得られたガウス分布の確率密度関数を緑破線で重ねてプロットしている。

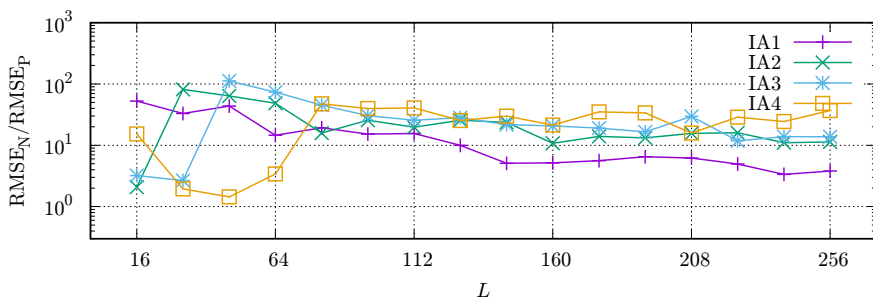
分布での RMSE との比を表している。これらより、Pearson 分布での RMSE は特に IMF1 から IMF4 において  $L > 64$  で非常に小さくなっており、よく一致していることがわかり、ほとんどの場合においてガウス分布よりも一致度が高いことが定量的に示された。



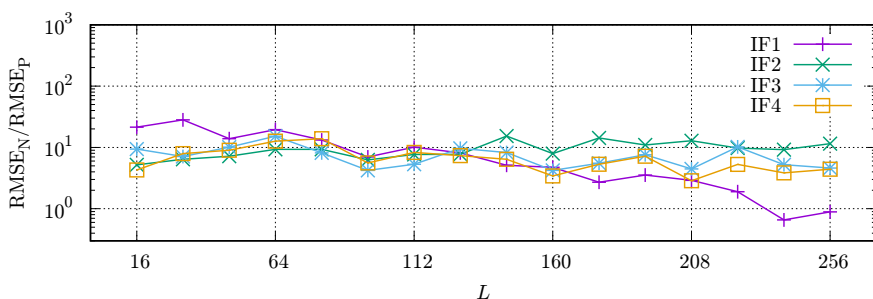
(a)



(b)



(c)



(d)

図 14: 推定した Pearson 分布の確率密度関数と得られたヒストグラムとの RMSE の値。および、ガウス分布の確率密度関数との RMSE との比。

## 5.5 異常検知への応用の検討

近年、様々な分野において HHT を応用して機器の異常や状態の変化を検出する研究が報告されている [37, 38, 39]。しかしながら、これらはすべて視覚的、定性的な議論しかなされていなく、定量的な手法にまでできていないことが現状である。その背景には HHT の数学的な基礎が確立されていない [29] という現状がある。ここではこれまでに調べてきた HHT のノイズに対する性能をもとに、機械学習の枠組みの中の異常検知の考え方に応用することを検討していく。

### 5.5.1 異常検知の考え方

異常検知とは、取得されたデータの中で異常な振る舞いをしている部分を探す機械学習の 1 つである。異常検知の基本的な枠組みとしては、取得されたデータのそれぞれに対して、異常度と呼ばれる特徴量を計算し、その異常度が基準を上回った場合にそのデータを異常と判断するというものである。ここでは一般的な異常検知手法における異常度の定義の仕方や、そのモデルの評価の仕方について述べる。

異常検知を行うには、学習用データセット  $\mathcal{D}_T$  と検証用データセット  $\mathcal{D}_V$  が与えられている必要がある。まずラベル付きの学習用データセットが与えられている場合を考える。すなわち、 $i$  番目のデータ  $\mathbf{x}^{(i)}$  のラベルを  $y^{(i)}$  とすると、 $\mathbf{x}^{(i)}$  が正常であれば  $y^{(i)} = 0$ 、異常であれば  $y^{(i)} = 1$  という値をとり、この  $\mathbf{x}^{(i)}$  と  $y^{(i)}$  の組が与えられているという場合である。すなわち、学習用データ数を  $N_T$  として、

$$\mathcal{D}_T = \left\{ (\mathbf{x}^{(1)}, y^{(1)}), (\mathbf{x}^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (\mathbf{x}^{(N_T)}, y^{(N_T)}) \right\}. \quad (5.109)$$

である。この場合、正常なデータと異常なデータそれぞれについての異なる確率分布、すなわちクラスラベル  $y$  による条件付き確率密度関数  $p(\mathbf{x} | y)$  を考えることができる。学習用データセット  $\mathcal{D}_T$  によって学習した条件付き確率を  $p(\mathbf{x} | y, \mathcal{D}_T)$  と表すこととする。このとき、あるデータ  $\mathbf{x}$  に対する異常度  $a(\mathbf{x})$  は次のように定義できる。

$$a(\mathbf{x}) = \ln \frac{p(\mathbf{x} | y = 1, \mathcal{D}_T)}{p(\mathbf{x} | y = 0, \mathcal{D}_T)}. \quad (5.110)$$

異常データと仮定したときのそのデータの生起確率が正常データと仮定したときの生起確率を上回る分だけ異常度が大きくなる。これをネイマン・ピアソン決定則という。

次に学習用データセットにおいて正常と異常のラベルが付けられていない場合を考える。つまり、

$$\mathcal{D}_T = \left\{ \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(N_T)} \right\} \quad (5.111)$$

である。この場合は、学習用データセットに含まれているデータはほとんどが正常データだと仮定して学習を行う。検知したいのは異常なデータであり、正常なデータと比べて発生頻度が著しく低いと考えているからである。この点が特に 2 クラス分類問題と異常検知とで異なる点である。したがって、この学習用データセットを使って推定された確率密度関数  $p(\mathbf{x} | \mathcal{D}_T)$  は正常データの分布をモデル化したものと捉えられる。異常なデータ、つまり正常データと定性的に異なるデータについては、正常データのモデルでは正しく記述できないはずであるため、この分布における外れ値として現れることが期待される。すなわち、ある異常データ  $\mathbf{x}_a$  については  $p(\mathbf{x}_a | \mathcal{D}_T)$  は小さい値を取ると考えられる。これを踏まえて、この場合の異常度  $a(\mathbf{x})$  は

$$a(\mathbf{x}) = -\ln p(\mathbf{x} | \mathcal{D}_T) \quad (5.112)$$

と定義される。これは情報理論の立場から見ると Shannon 情報量を表しており、異常度が高いデータは珍しいデータであるために情報量が大きいう解釈ができる。あるいは統計理論の立場から見ると正常データに基づく負の対数尤度の式であり、異常度が高いとそれだけそのデータは正常データの分布における当てはまりが悪いという解釈ができる。

### 5.5.2 異常検知モデルの評価

異常検知モデルは以下の 2 点を定めることで作成される。

- (a). 正常データにおける確率密度関数をどう記述するか
- (b). 異常度をどう定義するか

これらを定めて作成したモデルの性能を評価する方法について述べていく。

検証用データセットは正常データと異常データの両方を含んでいるものとし、ラベル付もされていることとする。その検証用データセットの各データに対して閾値のある値に決めてモデルを適用した結果について、以下の 4 つの量が定義される。

$$TP = (\text{異常データを正しく異常と判断した回数}), \quad (5.113)$$

$$TN = (\text{正常データを正しく正常と判断した回数}), \quad (5.114)$$

$$FP = (\text{正常データを誤って異常と判断した回数}), \quad (5.115)$$

$$FN = (\text{異常データを誤って正常と判断した回数}). \quad (5.116)$$

これらはそれぞれ true positive, true negative, false positive, false negative の頭文字をとったものである。そして、これらの量を使って偽陽性率 (false positive rate) FPR, 再現率 (recall)  $R$ , 適合率 (precision)  $P$ , F 値 (F-measure)  $F$  を次のように定義する。

$$FPR = \frac{FP}{TP + FP}, \quad R = \frac{TP}{TP + FN}, \quad P = \frac{TP}{TP + FP}, \quad F = \frac{2R \cdot P}{R + P}. \quad (5.117)$$

これらの値は閾値を変化させると変化する。横軸に FPR, 縦軸に  $R$  を取って、閾値を変化させたときの変化をプロットしたグラフのことを ROC 曲線 (receiver operating characteristic curve) という。誤検出を減らすために閾値を低くすれば異常の見逃しも増え、逆に異常の見逃しを減らすために閾値を高くすれば誤検出も増えるといったように、FPR と  $R$  はトレードオフの関係にある。ランダムに正常と異常を振り分けるモデルにおける ROC 曲線は  $(0, 0)$  と  $(1, 1)$  を結んだ直線となる。優れたモデルであるほど、低い FPR で高い  $R$  を得られるため、グラフが  $(0, 1)$  に近い部分を通過するようになる。この前提に基づいて、ROC 曲線の下側面積 (AUC: area under the curve) でモデルの良さを表すことができる。AUC が大きいほどモデルの性能が高いと言える。

AUC に基づいてモデルを選択できたら、異常度の閾値を何らかの基準で定める必要がある。そこで用いられる指標の 1 つが F 値である。F 値は再現率と適合率との調和平均であり、モデルの適用結果を総合的に判断する指標となっている。この F 値が最大となるように閾値を決める。

### 5.5.3 構築した異常検知手法

Hilbert-Huang 変換とピアソン分布族を用いて異常検知を行うプロセスを考案した。まず、その手順は以下のようにになっている。

(I.1). 入力データ  $x[n]$  に HHT を施し、各 IMF の瞬時振幅  $IA_j[n]$  と瞬時周波数  $IF_j[n]$  を得る ( $j = 1, \dots, N_{\text{IMF}}$ )。

(I.2). IA の区間平均  $a_j[n; L]$  と IF の区間平均  $f_j[n; L]$  を計算する。

$$a_j[n; L] = \frac{1}{L} \sum_{k=k_i(n)}^{k_i(n)+L-1} IA_j[k], \quad (5.118)$$

$$f_j[n; L] = \frac{1}{L} \sum_{k=k_i(n)}^{k_i(n)+L-1} IF_j[k] \quad (5.119)$$

ここで、各セグメントに 50 % のオーバーラップを持たせるために

$$k_i(n) = \left\lfloor \frac{nL}{2} \right\rfloor \quad (5.120)$$

とする。セグメント数  $N_{\text{seg}}$  は

$$N_{\text{seg}} = \left\lfloor \frac{2(N-L)}{L} \right\rfloor \quad (5.121)$$

となる。

(I.3). 次の特徴量  $x_L$  を計算する。

$$x_L = \min_{1 \leq j \leq N_{\text{IMF}}} \left[ \min_{0 \leq k \leq N_{\text{seg}}} p_j^{\text{IA}}(a_j[k; L]; L) p_j^{\text{IF}}(f_j[k; L]; L) \right]. \quad (5.122)$$

$p_j^{\text{IA}}(a; L)$  と  $p_j^{\text{IF}}(f; L)$  はそれぞれ正常データにおける  $j$  番目の IMF の IA と IF の区間長  $L$  での平均値  $a$  と  $f$  についての確率密度であり、事前に推定しておく必要がある。

(I.4). 事前に決定しておいた閾値  $\varepsilon_{\text{th}}$  をもとに、もし  $x_L < \varepsilon_{\text{th}}$  であったら異常と判断し、それ以外であれば正常と判断する。

この手順を実行するにあたり、事前に確率密度関数  $p_j^{\text{IA}}(a; L)$ ,  $p_j^{\text{IF}}(f; L)$  を推定し、区間長  $L$  と閾値  $\varepsilon_{\text{th}}$  を決定しておかなくてはならない。ここではまず単純な例として、正常か異常かが既知のデータを学習用データセットと検証用データセットに分け、これらの推定と決定を行う手順を説明する。

まず区間長  $L$  の候補をいくつか用意する。候補数を  $N_L$  とし、 $i$  番目の候補を  $L_i$  とする ( $i = 1, \dots, N_L$ )。まず学習用データセットを使い、式 (5.107), (5.108) にしたがって候補となる  $L_i$  それぞれについての区間平均のデータセットをつくる。このデータセットを使って  $j$  番目の IMF の IA と IF の区間長  $L_i$  での平均値の分布についての  $k$  次のモーメント  $\mu_{j,k}^{\text{IA}}(L_i)$ ,  $\mu_{j,k}^{\text{IF}}(L_i)$  を計算する ( $k = 1, \dots, 4$ )。このモーメントを使えば、5.3 節の理論にしたがって、Pearson 分布の確率密度関数  $p_j^{\text{IA}}(a; L_i)$ ,  $p_j^{\text{IF}}(f; L_i)$  の推定が推定できる。

実際に用いる区間長  $L$  と閾値  $\varepsilon_{\text{th}}$  の決定は検証用データセットを使って行う。その手順を以下に示す。 $N_V$  は検証用データセットに含まれるデータ数である。

(II.1). 各区間長の候補  $L_i$  ( $i = 1, \dots, N_L$ ) について、異常検知のアルゴリズム (I.1) から (I.3) までを行い、各検証用データにおける指標値  $x_{L_i}^{(n)}$  を計算する ( $n = 1, \dots, N_V$ )。



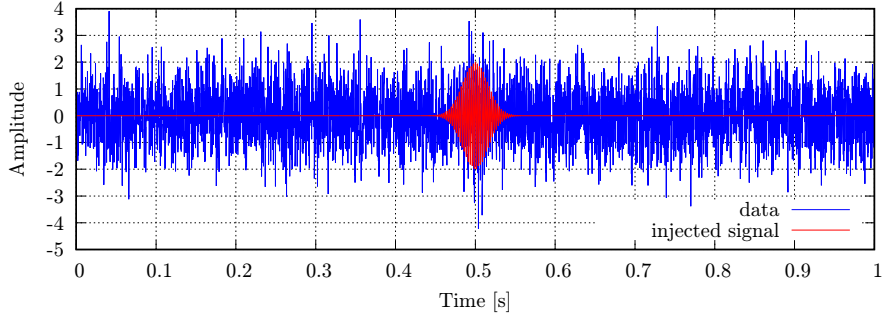


図 15: 異常データの例

(II.2). 各区間長の候補  $L_i$  での指標値  $x_{L_i}^{(n)}$  について、閾値  $\varepsilon_{\text{th}}$  を変化させながら、TP, TN, FP, FN の個数の変化を調査し、再現率  $R(\varepsilon_{\text{th}}; L_i)$ 、誤検出率  $\text{FPR}(\varepsilon_{\text{th}}; L_i)$ 、そして F 値  $F(\varepsilon_{\text{th}}; L_i)$  を求め、ROC 曲線の下側面積  $\text{AUC}(L_i)$  を計算する。

(II.3). AUC が最も大きくなる区間長を採用する。

$$\hat{L} = \underset{L}{\operatorname{argmax}} \text{AUC}(L). \quad (5.123)$$

(II.4).  $\hat{L}$  において F 値の最も大きくなる閾値を採用する。

$$\hat{\varepsilon}_{\text{th}} = \underset{\varepsilon_{\text{th}}}{\operatorname{argmax}} F(\varepsilon_{\text{th}}; \hat{L}). \quad (5.124)$$

最後に、決定した区間長  $\hat{L}$  と閾値  $\hat{\varepsilon}_{\text{th}}$  で評価用データセットに対して異常検知のアルゴリズム (I.1) から (I.4) までを行い、F 値などを用いて評価を行う。

## 5.6 異常検知のシミュレーション

ノイズだけのデータを正常データとし、ノイズに突発的な信号を注入したデータを異常データとして、それぞれ用意して上記のアルゴリズムのシミュレーションを行った。ノイズとしてはガウスノイズを使った。異常データに注入する信号としては式 (5.125) で表される sine-Gaussian 信号を採用した。

$$s(t; A, f, Q) = A \exp\left(-\frac{(2\pi ft)^2}{2Q^2}\right) \sin(2\pi ft). \quad (5.125)$$

$A$  がピーク振幅、 $f$  が中心周波数、 $Q$  が減衰の速さを表す  $Q$  値である。ノイズの標準偏差を  $\sigma$  とすると、 $A$  と  $\sigma$  はその比  $A/\sigma$  が意味をもつ。ここでは  $\sigma = 1.0$ 、 $A = 2.0$  として  $A/\sigma = 2.0$  とした。異常データの例を図 15 に示す。青線がデータであり、赤線が注入された sine-Gaussian 信号である。このシミュレーションでは  $2\pi f = 500, 1000, \dots, 4500$  rad/s、 $Q = 10, 20, \dots, 50$  の 25 種類の異常データを生成した。また、正常データは 10,000 個用意した。それぞれ標本化周波数  $f_s = 4,096$  Hz、信号の長さ  $T = 1$  s として 4,096 点のデータとした。すなわち、標準偏差  $\sigma = 1.0$  で 4,096 点のガウスノイズを擬似乱数のシードを変えて 10,025 個作成し、そのうちの 25 個に 25 種類の sine-Gaussian 信号をそれぞれ注入したものが異常データセット、残りの 10,000 個が正常データセットとした。これらのデータを表 2 に示す割合で学習用データセットと検証用データセット、そして評価用データセットに振り分けた。

検証用データにおける  $L = 96, 224, 256$  の場合についての ROC 曲線を図 16 に、区間長の変化による AUC の変化をプロットしたものを図 17 に示す。この場合、採用される区間長  $\hat{L}$  は  $\hat{L} = 96$  である。そし

表 2: データの振り分け。normal が正常データ, anomaly が異常データを表している。

	normal	anomaly
training set	6,000	0
validation set	2,000	12
test set	2,000	13

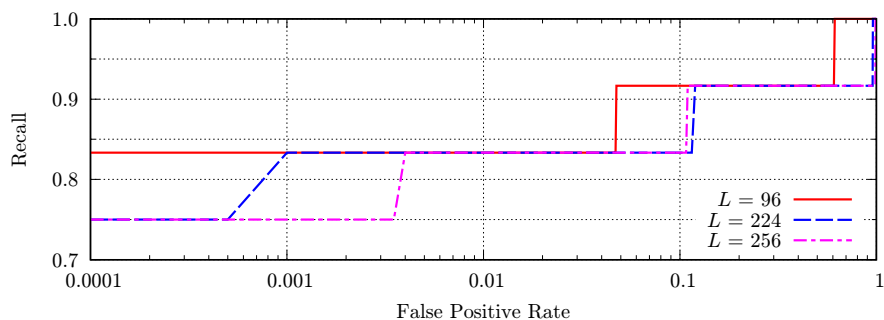
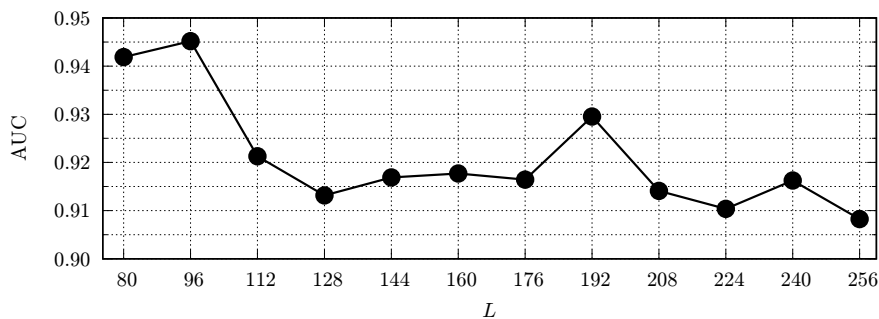
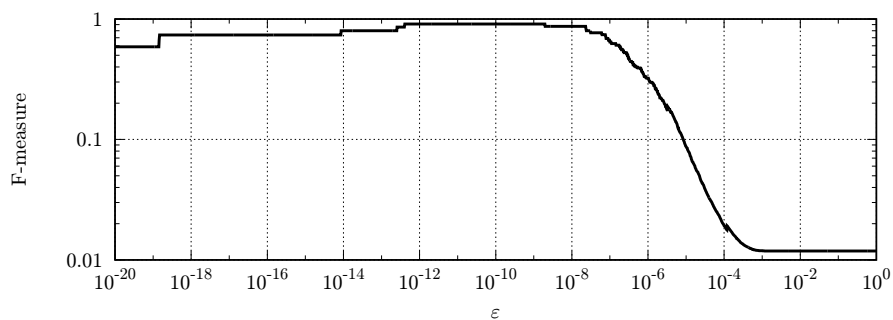
図 16:  $L = 96, 224, 256$  での ROC 曲線図 17: 各区間長  $L$  についての AUC図 18: 区間長  $L = 96$  としたときの閾値による F 値の変化

表 3: 評価用データにおける実行結果

TP	FN	FP	TN
9	4	0	2,000

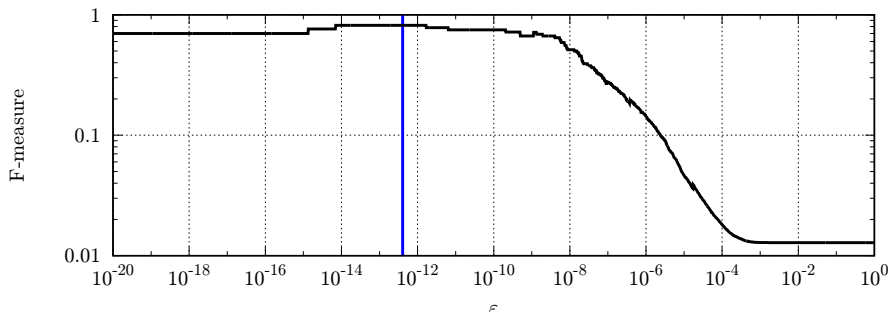


図 19: 評価用データにおける F 値の変化。

て区間長  $L = 96$  としたときの閾値による F 値の変化をプロットしたものが図 18 である。F 値が最大となるのは  $\hat{\epsilon}_{\text{th}} = 4.07 \times 10^{-13}$  であった。

最後に未知データにおける汎化性能を評価するために、検証用データで設定した  $\hat{L}$ ,  $\hat{\epsilon}_{\text{th}}$  を使って評価用データでの性能を調べた。識別結果のまとめを表 3 に示す。FN は 4 個あったが、FP は 0 個という結果となった。また、未知データに対しての閾値の設定の妥当性を調べるために、評価用データにおける閾値と F 値の関係をプロットしたものが図 19 である。図中の青線の位置の閾値の値が今回設定した  $\hat{\epsilon}_{\text{th}}$  を表している。この図より、設定値は評価用データにおいても F 値が最大となる値であり、妥当な値が設定できるがわかった。

## 5.7 他のモデルとの比較

前節で提案した手法は IA と IF の両方を使用したものであった。もっと単純に IA のみを使ったモデルも考えられる。すなわち特徴量を式 (5.122) の  $x_L$  から

$$y_L = \min_{1 \leq j \leq N_{\text{IMF}}} \left[ \min_{0 \leq k \leq N_{\text{seg}}} p_j^{\text{IA}}(a_j[k; L]; L) \right]. \quad (5.126)$$

に変えたものである。これら 2 つのモデルについて区間長による AUC の変化を比較したものが図 20 である。2 つを比較すると、区間長  $L$  が小さい範囲では有意な差は見られないが、 $L$  が大きな範囲では IA のみを使ったモデルにおいて AUC が下がっていく一方で、IA と IF の両方を使用したモデルにおいては AUC の低下が抑えられていることがわかる。これは以下のように考察できる。まず区間長を大きくすると異常データにおける IA が突発的に上昇している部分の寄与が相対的に小さくなり、IA についての異常度が小さくなる。一方で突発的な成分はその成分が属する帯域を持つ IMF よりも高周波な IMF に分解される傾向にあることがわかっている。その傾向をパワースペクトル密度で示した図が図 21 である。この図は図 15 の異常データを EMD して得られた IMF2 のパワースペクトル密度をプロットしたものであり、それに重ねて、ノイズにおける PSD と注入した sine-Gaussian 信号の PSD をプロットしている。注入した sine-Gaussian 信号は IMF3 の帯域であるが、実際にはそれより高周波な帯域をもつ IMF2 に分解された。したがって、突発的な信号が含まれている部分においては周波数とその IMF の他の部分に比べて小さくな

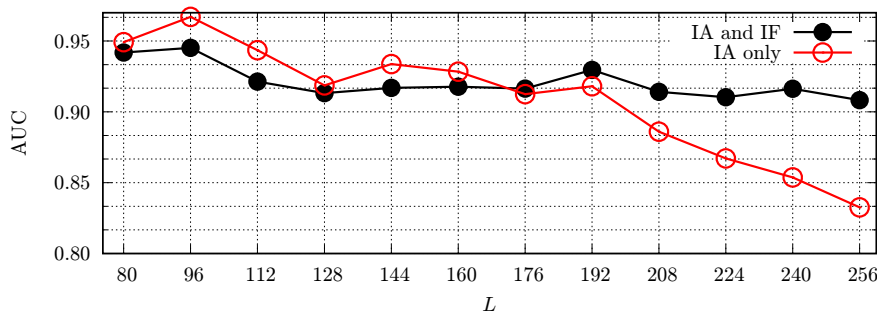


図 20: IA と IF の両方を使用したモデルと IA のみを使用したモデルとの AUC の比較

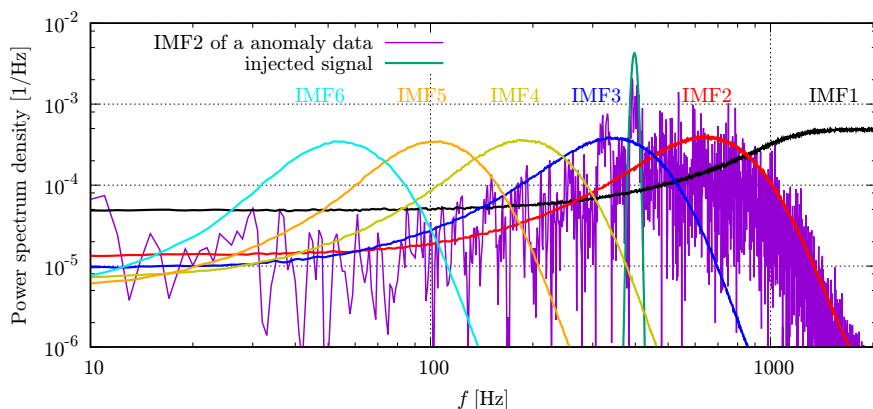


図 21: 図 15 の異常データを EMD して得られた IMF2 のパワースペクトル密度（紫実線）と、標準偏差  $\sigma = 1.0$  のガウスノイズを EMD して得られる IMF1 から 6 の平均パワースペクトル密度、および注入した sine-Gaussian 信号のパワースペクトル密度。注入した sine-Gaussian 信号は IMF3 の帯域にあるが、ノイズに混ぜたときにはそれより高周波な IMF2 に分解されている。

る。このことから、IA と IF を両方を使用した場合には IA における異常度の低下を IF の寄与で補えていると考えることができる。

検出したい信号以外にもより短い時間で振幅が大きくなるノイズが存在していることがわかっている場合など、なるべく区間長を大きくしたい場合においては、IA と IF の両方を考慮に入れた方が効率が良いと考えられる。

## 6 HHT を用いた連星ブラックホール合体重力波の解析

HHT の重力波データ解析への応用の対象として、連星ブラックホール合体重力波の特に Ringdown 部分に着目し、HHT の強みを活かした新しい解析手法の構築を行った。本章ではその解析手法について解説し、評価結果を報告する。準備として、ブラックホールやその摂動の理論的な背景を説明してから、解析の目的や構築した手法について説明し、シミュレーションや実観測データに対する適用結果を報告する。なお、ブラックホールの摂動や準固有振動については Berti らのレビュー論文 [40] に詳しい。また多少古い Nakamura らの論文 [41] や Kokkotas らの論文 [42] も参考になる。

### 6.1 ブラックホール

#### 6.1.1 一般相対性理論のブラックホール解

宇宙空間のある 1 点 ( $r = 0$ ) に質量  $M$  の天体が存在しているときの時空について考える。一般に球対称な時空の線素は、

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)} dt^2 + e^{\lambda(r,t)} dr^2 + r^2 (dr^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.1)$$

という形で表すことができる。天体の持つ自転角運動量を 0 としたとき、天体の外側は真空であると仮定すると、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (dr^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.2)$$

となることが確かめられる。この時空のことを Schwarzschild 時空という。これ以降、 $c = G = 1$  となるような単位系（自然単位系）を用いることとする。Schwarzschild 時空は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (dr^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.3)$$

と表される。式より、Schwarzschild 時空は  $r = 0$  と  $r = 2M$  において計量に発散する成分が現れてしまう。この中で  $r = 2M$  については、発散する成分が出ないように座標系の取り方を選ぶことができる（等方座標系など）ため、この座標系の取り方のときのみ現れる特異点として、見かけの特異点と呼ばれる。そして  $r_s = 2M$  のことを Schwarzschild 半径という。

質量  $M$  が  $r < r_s$  の領域にのみ分布している場合を考える。 $r > r_s$  において動系方向 ( $d\theta = d\varphi = 0$ ) に進む光について調べると、その経路は  $ds^2 = 0$  を満たすので

$$0 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \iff \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (6.4)$$

が成り立つ。 $r_1 > r_s$  にて放射された光が  $r_2 > r_1$  に到着するまでに要する時間  $\Delta t_{12}$  は、 $dr/dt > 0$  より、

$$\begin{aligned}
 \Delta t_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{dr} dr \\
 &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{1 - r_s/r} dr \\
 &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{r - r_s} dr \\
 &= \int_{r_1}^{r_2} \left( 1 + \frac{r_s}{r - r_s} \right) dr \\
 &= r_2 - r_1 + r_s \ln \frac{r_2 - r_s}{r_1 - r_s}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

となる。この式より、 $r_1 \rightarrow r_s$  を考えると、 $\Delta t_{12} \rightarrow \infty$  であることがわかる。すなわち、 $r \leq r_s$  から放射された光は有限時間内に外部  $r_2 > r_s$  に届かないということになる。より大域的な時空としての性質として、ある閉曲面より内側から放射された光の経路を考えたときに、無限の時間を要しても無限遠まで届かない場合（重力ポテンシャルの束縛から抜け出せない場合）、その閉曲面のことを事象の地平面 (event horizon) と呼ぶ。Schwarzschild 時空においては  $r = r_s$  で規定される面が事象の地平面である。事象の地平面を持つ天体のことをブラックホール (black hole) という。なお、その他の地平面と呼ばれる閉曲面として見かけの地平面 (apparent horizon) がある。見かけの地平面は、それより内側で放射された光の経路を考えたときに、外向き ( $r$  が増える向き) の経路を取り得なくなる境界として定義される。見かけの地平面が存在する場合は必ずその外側あるいは同一面上に事象の地平面も存在する。Schwarzschild ブラックホールについては事象の地平面と見かけの地平面は同一であるが、非定常なブラックホールについては一致しないことが知られている。事象の地平面は大域的に定義される地平面であるのに対して、見かけの地平面は局所的な光の経路によって定義される地平面であるので、数値シミュレーションにおいてブラックホールが生成されたかどうかを判断する際には見かけの地平面の存在を確認する。

自転角運動量がゼロでない場合の時空については Kerr によって導かれ、その線素  $ds^2$  は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} k^2 \tag{6.6}$$

$$k = \frac{r}{r^2 + a^2}(xdx + ydy) + \frac{a}{r^2 + a^2}(xdy - ydx) + r(zdz + rdt) \tag{6.7}$$

$$0 = r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 \tag{6.8}$$

となる。これを Kerr 時空という。 $a$  は天体の自転角運動量を  $J$ 、質量を  $M$  としたときに  $a = J/M$  と定義される。1967年に Boyer と Lindquist が

$$\begin{aligned}
 x &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \cos(\varphi - \arctan(a/r)), \\
 y &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \sin(\varphi - \arctan(a/r)), \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

という変換を考えると、Kerr 時空は

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -dt^2 + dr^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\varphi + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 \\
 &\quad + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dr + a \sin^2 \theta d\varphi + dt)^2
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

と表すことができ、さらに

$$d\bar{\varphi} = d\varphi + \frac{a}{\Delta} dr, \quad d\bar{t} = dt - \frac{2Mr}{\Delta} dr, \quad \Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta := r^2 - 2Mr + a^2 \tag{6.11}$$

とすることで

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\bar{\varphi} + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\bar{\varphi}^2 \quad (6.12)$$

と表すことができることを明らかにした。この座標系の取り方は Boyer-Lindquist 座標と呼ばれ、基本的に Kerr 時空はこの座標系で表すことが多い。Kerr 時空は  $\Sigma = 0$  つまり  $(r, \theta) = (0, \pi/2)$  に特異点を持つ。また、 $\Delta = 0$  つまり  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$  には見かけの特異点を持つ。Schwarzschild 時空の時と同様に、質量  $M$  が  $r < r_+$  に分布しているとき、 $r_+$  は事象の地平線となり、その天体は Kerr ブラックホールと呼ばれる。

ブラックホールは電荷  $Q$  を持ち得ることも示唆されている。自転角運動量  $J = 0$  で電荷  $Q \neq 0$  のブラックホールを Reissner-Nordström ブラックホールといい、自転角運動量  $J \neq 0$  で電荷  $Q \neq 0$  のブラックホールを Kerr-Newman ブラックホールという。Kerr-Newman ブラックホール解はその特殊な場合として他の 3 つの解を含んでいる。また、一般相対性理論のアインシュタイン方程式 (2.24) で規定される 4 次元時空において、裸の特異点が存在しないと仮定すると、定常的かつ漸近的に平坦となる軸対称なブラックホールは  $|a| < M$  の Kerr-Newman ブラックホールとして表すことができるということが知られている。あるいは、ブラックホール解における観測可能な物理量は質量と電荷と角運動量の 3 つだけであり、その他の情報は事象の地平線に落ち込んで消失する、という表現もされる。前者をブラックホールの唯一性定理 (uniqueness theorem) といい、後者をブラックホールの無毛定理 (no-hair theorem) という。これらは Israel [43], Carter [44], Hawking [45], Robinson [46] によってまとめられた。no-hair theorem を確かめて一般相対性理論の検証を行うことも重力波観測の担う大きな意義の 1 つである。

### 6.1.2 ブラックホールの摂動と準固有振動

無毛定理 (唯一性定理) より、ブラックホールは定常的には Kerr-Newman ブラックホールとなることがわかった。ただし、これらの定理は過渡状態については何も述べていない。1957 年、Regge と Wheeler が Schwarzschild 時空における摂動についての論文 [47] を公表し、それを皮切りにブラックホールについての摂動の理論 (black hole perturbation theory) の研究が活発となった。

Schwarzschild 時空における計量を  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  とする。つまり、

$$g_{\mu\nu}^{(0)} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (6.13)$$

である。この時空の摂動

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \quad (6.14)$$

を考える。 $h_{\mu\nu}$  は  $(t, r, \theta, \varphi)$  に依存していることに注意して、まず  $t$  について逆フーリエ変換すると

$$h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) = \int d\omega \tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, r, \theta, \varphi) e^{i\omega t} \quad (6.15)$$

と表すことができる。さらに  $\tilde{h}_{\mu\nu}$  を球面調和展開することを考える。Zerilli [48] の記法を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \left[ & A_{l,m}^{(0)}(\omega, r) \{a_{l,m}^{(0)}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} + A_{l,m}^{(1)}(\omega, r) \{a_{l,m}^{(1)}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} + A_{l,m}(\omega, r) \{a_{l,m}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} \right. \\ & + B_{l,m}^{(0)}(\omega, r) \{b_{l,m}^{(0)}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} + B_{l,m}(\omega, r) \{b_{l,m}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} \\ & + Q_{l,m}^{(0)}(\omega, r) \{c_{l,m}^{(0)}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} + Q_{l,m}(\omega, r) \{c_{l,m}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} \\ & \left. + G_{l,m}(\omega, r) \{g_{l,m}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} + D_{l,m}(\omega, r) \{d_{l,m}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} + F_{l,m}(\omega, r) \{f_{l,m}(\theta, \varphi)\}_{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

という形で展開する。Regge-Wheeler ゲージ [47] を用いると odd-parity 成分について残る成分は  $Q_{l,m}^{(0)}$  と  $Q_{l,m}$  の 2 つだけとなり、

$$h_{l,m}^{(0)}(\omega, r) := -\frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} Q_{l,m}^{(0)}(\omega, r), \quad h_{l,m}^{(1)}(\omega, r) := i \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r} Q_{l,m}^{(1)}(\omega, r) \quad (6.17)$$

とにおいて、 $\tilde{h}_{\mu\nu}$  を行列表示すると、

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_{l,m}^{(0)}(\omega, r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial\varphi} & h_{l,m}^{(0)}(\omega, r) \sin\theta \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial\theta} \\ * & 0 & -h_{l,m}^{(1)}(\omega, r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial\varphi} & h_{l,m}^{(1)}(\omega, r) \sin\theta \frac{\partial Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{\partial\theta} \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

となる。 $*$  は対称性  $h_{\nu\mu} = h_{\mu\nu}$  によって決まる要素を表す。 $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  はスカラー球面調和関数である。一方、even-parity 成分については、残るのは  $A_{l,m}^{(0)}$ ,  $A_{l,m}^{(1)}$ ,  $A_{l,m}$ ,  $G_{l,m}$  の 4 成分であり、 $\Delta := r(r - 2M)$  として

$$\begin{aligned} H_{l,m}^{(0)}(\omega, r) &= \frac{r^2}{\Delta} A_{l,m}^{(0)}(\omega, r), & H_{l,m}^{(1)}(\omega, r) &= \frac{i}{\sqrt{2}} A_{l,m}^{(1)}(\omega, r), \\ H_{l,m}^{(2)}(\omega, r) &= \frac{\Delta}{r^2} A_{l,m}^{(2)}(\omega, r), & K_{l,m}(\omega, r) &= \frac{1}{\sqrt{2}} G_{l,m}(\omega, r) \end{aligned} \quad (6.19)$$

とおくと、 $\tilde{h}_{\mu\nu}$  の成分表示は

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\omega, r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{r^2} H_{l,m}^{(0)}(\omega, r) & H_{l,m}^{(1)}(\omega, r) & 0 & 0 \\ * & \frac{r^2}{\Delta} H_{l,m}^{(2)}(\omega, r) & 0 & 0 \\ * & * & r^2 K_{l,m}(\omega, r) & 0 \\ * & * & * & r^2 K_{l,m}(\omega, r) \sin^2\theta \end{pmatrix} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (6.20)$$

となる。odd-parity については  $h^{(0)}$ ,  $h^{(1)}$  の 2 自由度あり、even-parity については  $H^{(0)}$ ,  $H^{(1)}$ ,  $H^{(2)}$ ,  $K$  の 4 自由度が残っている。式 (6.14) の計量にこれらの結果を入れて、アインシュタイン方程式を考えることで、これらの係数の従う方程式が得られる。 $R_{l,m}^{(\pm)}(\omega, r)$  を以下の条件を満たすように定義する。

$$h_{l,m}^{(1)}(\omega, r) = \frac{r^3}{\Delta} R_{l,m}^{(-)}(\omega, r), \quad (6.21)$$

$$K_{l,m}(\omega, r) = \frac{\lambda(\lambda+2)r^2 + 6\lambda r + 24}{2r^2(\lambda r + 6)} R_{l,m}^{(+)}(\omega, r) + \frac{\Delta}{r^2} \frac{\partial R_{l,m}^{(+)}(\omega, r)}{\partial r}, \quad (6.22)$$

$$\lambda = (l-1)(l+2). \quad (6.23)$$



そして, tortoise 座標  $r_*$  を以下のように定義する。

$$r_* := r + 2M \log \left( \frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (6.24)$$

$r \rightarrow \infty$  で  $r_* \rightarrow \infty$  であり,  $r \rightarrow 2M$  つまり event horizon に向かう極限で  $r_* \rightarrow -\infty$  となる。これらによって, odd-parity (-) と even-parity (+) の両方に関して共通の,  $R_{l,m}^{(\pm)}(\omega, r)$  の従う方程式が以下のようを得られる。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \omega^2 - V_{l,m}^{(\pm)}(r) \right) R_{l,m}^{(\pm)}(\omega, r) = S_{l,m}^{(\pm)}(\omega, r). \quad (6.25)$$

ポテンシャル  $V_{l,m}^{(\pm)}(r)$  はそれぞれ

$$V_{l,m}^{(-)}(r) = \frac{\Delta}{r^5} \{(\lambda + 2)r - 6\}, \quad (6.26)$$

$$V_{l,m}^{(+)}(r) = \frac{\Delta}{r^5(\lambda r + 6)^2} \{ \lambda^2(\lambda + 2)r^3 + 6\lambda^2 r^2 + 36\lambda r + 72 \} \quad (6.27)$$

と定義される。 $S_{l,m}^{(\pm)}$  はエネルギー運動量テンソルから計算される項 (source term) である。ここでは event horizon の外 ( $r_* > -\infty$ ) は真空として  $S_{l,m}^{(\pm)}(\omega, r) = 0$  とする。その結果, 量子力学の散乱問題における Schrödinger 方程式と同じ形になる。この方程式は, odd-parity については Regge-Wheeler 方程式 [47], even-parity については Zerilli 方程式 [48] として知られている。量子力学の散乱問題において確率の流れの保存を考えたことを参考に, 以下の  $\rho_{l,m}(\omega, r_*)$  を考える。式 (6.25) は (±) のどちらでも式の形は同じなので, 記号を省略すると,

$$\rho_{l,m}(\omega, r_*) = R_{l,m}^*(\omega, r) \frac{\partial R_{l,m}(\omega, r)}{\partial r_*} - R_{l,m}(\omega, r) \frac{\partial R_{l,m}^*(\omega, r)}{\partial r_*}. \quad (6.28)$$

この  $\rho$  を  $r_*$  で偏微分すると,  $V_{l,m}(r) \in \mathbb{R}$  より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{l,m}(\omega, r_*)}{\partial r_*} &= R_{l,m}^*(\omega, r) \frac{\partial^2 R_{l,m}(\omega, r)}{\partial r_*^2} - R_{l,m}(\omega, r) \frac{\partial^2 R_{l,m}^*(\omega, r)}{\partial r_*^2} \\ &= R_{l,m}^*(\omega, r) (-\omega^2 R_{l,m}(\omega, r) + V_{l,m}(r) R_{l,m}(\omega, r)) \\ &\quad - R_{l,m}(\omega, r) (-\omega^2 R_{l,m}^*(\omega, r) + V_{l,m}(r) R_{l,m}^*(\omega, r)) \\ &= -\{\omega^2 - (\omega^*)^2\} |R_{l,m}(\omega, r)|^2, \end{aligned} \quad (6.29)$$

となり,  $\omega$  を実数すれば,  $\rho$  は  $r_*$  について定数となる。

ひとまず odd-parity の場合, つまり Regge-Wheeler 方程式について, バックグラウンドの時空  $g_{\mu\nu}^{(0)}$  を伝播する重力波について考える。ポテンシャル  $V_{l,m}^{(-)}(r)$  は  $r_* \rightarrow \pm\infty$  で 0 になり, かつ重力波の伝播する領域においては  $S_{l,m}^{(-)}(\omega, r)$  も 0 としてよいので, 式 (6.25) は  $r_* \rightarrow \pm\infty$  において, 漸近的に

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \omega^2 \right) R_{l,m}(\omega, r) = 0 \quad (6.30)$$

となっていく。したがって,  $|r_*|$  の十分大きな領域においては漸近的に

$$R_{l,m}(\omega, r) = A_{l,m}(\omega) e^{i\omega r_*} + B_{l,m}(\omega) e^{-i\omega r_*} \quad (6.31)$$

の形になる。ここで, 式 (6.15), (6.21) を思い出すと, 重力波  $h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi)$  には

$$A_{l,m}(\omega) e^{i\omega(r_*+t)} + B_{l,m}(\omega) e^{-i\omega(r_*-t)} \quad (6.32)$$

の成分が含まれているということである。第1項目が  $r$  の負の向きに伝播する波を表し、第2項目が正の向きに伝播する波を表すことがわかる。ポテンシャル  $V^{(-)}(r)$  による散乱問題として考えると、

$$R_{l,m}(\omega, r) = \begin{cases} A_{l,m}^{\text{in}}(\omega)e^{i\omega r_*} + A_{l,m}^{\text{out}}(\omega)e^{-i\omega r_*}, & (r_* \rightarrow +\infty), \\ B_{l,m}^{\text{in}}(\omega)e^{i\omega r_*}, & (r_* \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (6.33)$$

という形が考えられる。 $r_* = +\infty$  からポテンシャルに向かって振幅  $A^{\text{in}}$  の波を入射しときに、ポテンシャルによって反射して返ってきた波の振幅が  $A^{\text{out}}$  であり、ポテンシャルを透過した波の振幅が  $B^{\text{in}}$  である。 $r_* \rightarrow -\infty$  で out-going wave が無いのは、event horizon の内側から外側に重力波が伝播することはできないからである。 $\omega$  を実数として、それぞれの漸近領域において  $\rho$  を計算すると、

$$\rho_{l,m}(\omega, r) = \begin{cases} 2i\omega(|A_{l,m}^{\text{in}}(\omega)|^2 - |A_{l,m}^{\text{out}}(\omega)|^2), & (r_* \rightarrow +\infty), \\ 2i\omega|B_{l,m}^{\text{in}}(\omega)|^2, & (r_* \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (6.34)$$

となり、 $\rho$  の保存より、

$$|A_{l,m}^{\text{in}}(\omega)|^2 = |A_{l,m}^{\text{out}}(\omega)|^2 + |B_{l,m}^{\text{in}}(\omega)|^2 \quad (6.35)$$

が成り立つ。

ここでさらに、 $A_{l,m}^{\text{in}}(\omega) = 0$  という境界条件を追加する。これはつまり、外部からの入射波が無い状態でブラックホールからの放射波を考えるということになる。式 (6.35) より、 $\omega$  が実数ならこの条件を満たす解は  $A_{l,m}^{\text{out}}(\omega) = B_{l,m}^{\text{in}}(\omega) = 0$  しかない。一方で、 $\omega$  を複素数に拡張すると、 $A_{l,m}^{\text{out}}(\omega) \neq 0$ 、 $B_{l,m}^{\text{in}}(\omega) \neq 0$  となる解が存在しうることがわかっている\*1。このとき、ブラックホールが安定な系であるためには  $r \rightarrow \infty$  で  $|R_{l,m}(\omega, r)| \propto |e^{-i\omega r_*}| < \infty$  でなくてはならないので、 $\text{Im}[\omega] \leq 0$  が要請される。すなわち、減衰振動になる。このような振動をブラックホールの準固有振動 (QNM: quasinormal mode) といい、この条件を満たす時の  $\omega$  の値を QNM 周波数という。QNM 周波数は加算無限個存在していることがわかっている。物理的に考えると、 $A_{l,m}^{\text{in}}(\omega) = 0$  としたということは、外部からのエネルギーの流入がゼロということであり、ブラックホールが重力波の放射によってエネルギーを失いながら最も安定な状態へと落ち込んでいくという現象が、この減衰振動に対応している。

Chandrasekar と Detweiler [49] によって odd-parity, even-parity のどちらでも得られる QNM 周波数の値は同一であることが確かめられている。Schwarzschild ブラックホールについては Leaver [50] によって QNM 周波数の数値的な計算方法が提唱されている。最も基本となる  $l = 2$  のモードについては、 $M\omega = 0.3737 - i0.0890$  という値が得られている。中心周波数  $f_c$  と時定数  $\tau$  で表すと

$$f_c = (1.207 \text{ kHz}) \left( \frac{10M_\odot}{M} \right), \quad \tau = (0.5537 \text{ ms}) \left( \frac{M}{10M_\odot} \right) \quad (6.36)$$

である。 $M \sim 10M_\odot$  は恒星ブラックホールの代表的な値である。

Kerr ブラックホールの摂動についても考え方は同様だが、ブラックホールの角運動量に対する依存性も考慮に入れる必要があるため、直接計量の摂動を扱うと非常に複雑になる。1972年に Teukolsky [51] によって、Newman-Penrose 形式 [52] を用いた Kerr ブラックホールの摂動の方程式 (Teukolsky 方程式) が導かれた。Kerr ブラックホールの QNM については Detweiler [53] や Leaver [54] などが解析しており、Echeverria [55] が QNM の重力波から Kerr ブラックホールの質量と自転角運動量を推定する際の精度について議論している。この方法は後に Berti ら [56] によって修正され、それによって得られた様々な  $(l, m)$

\*1  $\omega$  を複素数にすると式 (6.15) は逆フーリエ変換ではなく逆ラプラス変換と呼んだ方が正しい。

における QNM 周波数と Kerr ブラックホールのパラメータの変換表がホームページにて公開されている [57]。no hair theorem によって、Kerr ブラックホールを見分ける自由度は質量  $M$  と角運動量  $J$  しかないはずなので、観測によって複数のモードの QNM 周波数が得られた際に、それぞれのモードにおける質量と角運動量を推定結果を比較することで no hair theorem の検証が可能である [58]。

Pretorius [59, 60] は連星ブラックホール (BBH: binary black hole) による重力波の数値シミュレーションを先駆けて行い、そのシミュレーション結果より、BBH の合体後の Ringdown phase における重力波は合体後のブラックホールの QNM が優勢になることが確かめられている。近年ではより多くの初期条件における BBH の数値シミュレーションが Simulating eXtreme Spacetime (SXS) グループによってなされており [61]、そのシミュレーション結果が Web で公開されている [62]。

## 6.2 BBH 重力波における QNM の開始時刻の推定

アメリカの LIGO グループは初検出を果たした 2015 年 9 月 14 日からこれまでの 2 年間に 6 件の重力波の検出を報告している [1, 2, 3, 4, 5]。うち 5 件は連星ブラックホール (BBH: binary black hole) の合体によって放射された重力波であった。これから先、LIGO や Virgo のさらなる感度の向上や KAGRA [63, 64] や LIGO India の参画、さらには Einstein Telescope [65] などの次世代の重力波望遠鏡の建設などが進められていくにつれて、BBH からの重力波のイベントはどんどん増えていくことが予想される。また、DECIGO という日本のグループの計画している宇宙重力波望遠鏡でも多くの BBH 重力波が検出されることが期待されている [66]。BBH の実観測データを使ってどのような議論ができるかを考えておくことが直近の課題となっている。

BBH からの重力波は 3 つの段階に分かれている。1 つ目は Inspiral と呼ばれ、2 つのブラックホールが互いの重力で公転しながら重力波を放射する段階である。2 つ目は Merger と呼ばれ、2 つのブラックホールが合体する瞬間に 2 つのブラックホールの境界が重なり、1 つのブラックホールとなっていくまでの段階である。3 つ目は Ringdown と呼ばれ、合体後に 1 つになったブラックホールが減衰振動をしながら定常状態へと移っていく段階である。先述したように、この減衰振動はブラックホールの準固有振動 (QNM: quasinormal mode) によるものである。

ある 1 つのモードの QNM からの重力波の波形  $h_{\text{QNM}}(t)$  は

$$\begin{aligned} h_{\text{QNM}}(t) &= \text{Re} \left[ A_0 e^{-i\{\omega(t-t_0)+\varphi_0\}} \right] \\ &= A_0 e^{\omega_I(t-t_0)} \cos(\omega_R(t-t_0) + \varphi_0) \end{aligned} \quad (6.37)$$

という減衰振動の式で表される。複素数  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  は QNM 周波数と呼ばれ、 $A_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $t_0$  はそれぞれ初期振幅、初期位相、そして QNM の開始時刻である。前節では、複素モードの QNM を観測することでブラックホールの唯一性定理の検証が行えることを説明した [58]。この他にも、Nakano ら [67, 68] によって、単一の QNM ( $(l, m, n) = (2, 2, 0)$ ) だけを用いて一般相対性理論の検証を行う方法が提唱されている。ただ、いずれの方法においても、QNM 周波数が精度良く推定できることが前提とされている。しかしながら、連星ブラックホール合体において、Merger から Ringdown に切り替わるタイミング、つまり QNM の開始時刻については、現象論的な定義が難しいことが知られている。LIGO による初検出の連星ブラックホール合体重力波の解析においても、QNM 周波数の推定は開始時刻の複数の可能性それぞれに対して行っているのが現状である [8]。

BBH の観測データを EMD することで式 (6.37) で表される QNM 重力波が  $j$  番目の IMF に完全に抽出

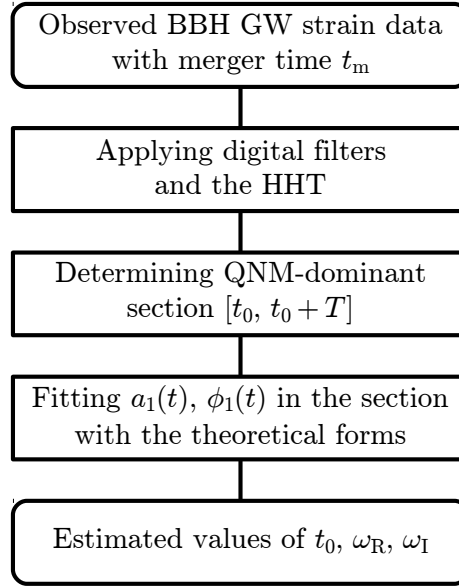


図 22: 手法の全体的な流れを示すフローチャート

できた場合、それを HSA して得られる瞬時振幅  $a_j(t)$  と瞬時位相  $\phi_j(t)$  はそれぞれ

$$a_j(t) = A_0 e^{\omega_I(t-t_0)}, \quad (6.38)$$

$$\phi_j(t) = \omega_R(t - t_0) + \varphi_0 \quad (6.39)$$

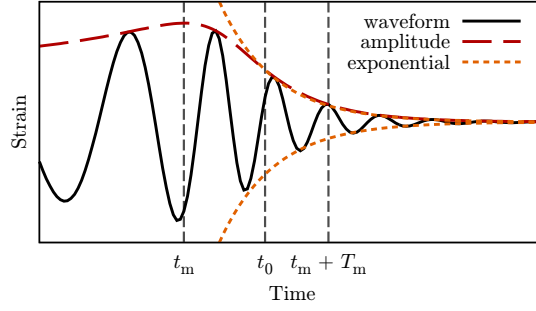
となることが期待される。実際にはその IMF には Merger の部分や、QNM が十分に減衰した後のノイズが主要になっている部分も含まれることになる。これらの区間においては式 (6.38), (6.39) は成立しない。したがって、式 (6.38) が最も精度良く成り立つ区間を見つければ、その区間の開始時刻を QNM の開始時刻として推定することができる。この区間のことを QDS (QNM-dominant segment) と呼ぶこととする。

手法の全体的な流れ図を図 22 に示す。この手法は大まかに以下の 3 つのステップで行われる。(A) 入力データにデジタルフィルタと HHT を施し、(B) QDS の決定を行い、(C) 瞬時振幅と瞬時位相のフィッティングを行う。

### 6.2.1 デジタルフィルタと HHT

重力波の観測データには様々なノイズが含まれているので、ラインノイズを除去した上で感度の良い帯域を取り出すためにデジタルフィルタをかける。ラインノイズの除去にはノッチフィルタを、帯域の取り出しにはバンドパスフィルタを用いる。これらのフィルタをかけた後で、QNM を取り出すために HHT を施す。

これらの処理をするにあたって、フィルタと HHT のパラメータを決める必要がある。まずバンドパスフィルタの下側カットオフ周波数は検出器のキャリブレーションが適切に行われた帯域の下限を設定する。Advanced LIGO においては 20 Hz である。残りのパラメータについては汎用的な決め方はないため、対象のデータによって適格的に決める。ここでは  $(l, m, n) = (2, 2, 0)$  の QNM を IMF1 に抽出することを目的としてパラメータ選択を行う。 $t_m$  を BBH の重力波の振幅が最も大きくなる時刻とし、 $T_m$  を Merger と Ringdown の初めをカバーするに十分な長さとしたときに、区間  $[t_m, t_m + T_m]$  における IMF1 のエネルギーが最大になるパラメータを選ぶ。すなわち、バンドパスフィルタの上側カットオフ周波数  $f_H$ , EEMD

図 23: 時間パラメータ  $t_m$ ,  $t_0$ ,  $T_m$  の説明

において加えるノイズの標準偏差  $\sigma_e$ , そして EMD の収束条件  $\epsilon_e$  について,

$$(\hat{f}_H, \hat{\sigma}_e, \hat{\epsilon}_e) = \operatorname{argmax}_{f_H, \sigma_e, \epsilon_e} \left[ \int_{t_m}^{t_m + T_m} |\operatorname{IMF}_1(t)|^2 dt \right] \quad (6.40)$$

である。今回は全ての波形に対して  $T_m = 10$  ms とする。もし全質量が  $60M_\odot$  以上の場合も考慮するときにはより大きな値を考慮する必要がある。これらの時刻パラメータ  $t_m$ ,  $T_m$ ,  $t_0$  を図示したものが図 23 である。

### 6.2.2 QNM-dominant segment の決定

QNM 信号が IMF1 に抽出された後, QDS の開始時刻  $\hat{t}_0$  と区間長  $\hat{T}$  を推定する。流れ図を図 24 に示す。

QDS においては IA が単調減少しているはずなので, まずは IA が単調減少している区間を探す。データ点で考えたときのその区間を  $[n_b, n_e]$  とする。その後, その区間内において, 可能な全ての開始点  $n_0$  と区間長  $N$  を考え, その区間  $[n_0, n_0 + N]$  において IA の対数  $\ln a_1[n]$  を線形関数  $bt[n] + c$  で回帰する。 $N$  と  $n_0$  の取りうる範囲はそれぞれ  $N_{\min} \leq N \leq n_e - n_b$ ,  $n_b \leq n_0 \leq n_e - N$  である。 $N_{\min}$  は事前に決める区間長の最小値であり, ここでは  $N_{\min} = 5$  とする。回帰の平均二乗誤差の平方根 RMSE (root mean squared error) を

$$\operatorname{RMSE}(n_0, N) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} (\ln a_1[n] - bt[n] - c)^2} \quad (6.41)$$

と定義する。各区間長  $N$  における開始点の最適値  $\hat{n}_0(N)$  をこの RMSE が最小となる  $n_0$  というように決める。すなわち,

$$\hat{n}_0(N) = \operatorname{argmin}_{n_0} \operatorname{RMSE}(n_0, N) \quad (6.42)$$

である。あとは最適な区間長  $\hat{N}$  を決めればよい。これを  $N - \operatorname{RMSE}(\hat{n}_0(N), N)$  グラフにおける傾きが変化する点として定義する。この決め方には以下の 2 つの仮説が前提となっている。

- (i). 区間  $[\hat{n}_0(N), \hat{n}_0(N) + N]$  が QDS に含まれている場合,  $N$  を増やしたときの RMSE の増加に寄与するのはノイズだけなので,  $N - \operatorname{RMSE}(\hat{n}_0(N), N)$  グラフにおける傾きは小さい。
- (ii). 区間  $[\hat{n}_0(N), \hat{n}_0(N) + N]$  が Merger やノイズが優位になっている QDS 以外の部分も含んでいる場合,  $N$  を増やすとフィッティングの基底が誤っている分だけ RMSE が大きく増加するので,  $N - \operatorname{RMSE}(\hat{n}_0(N), N)$  グラフにおける傾きは大きい。

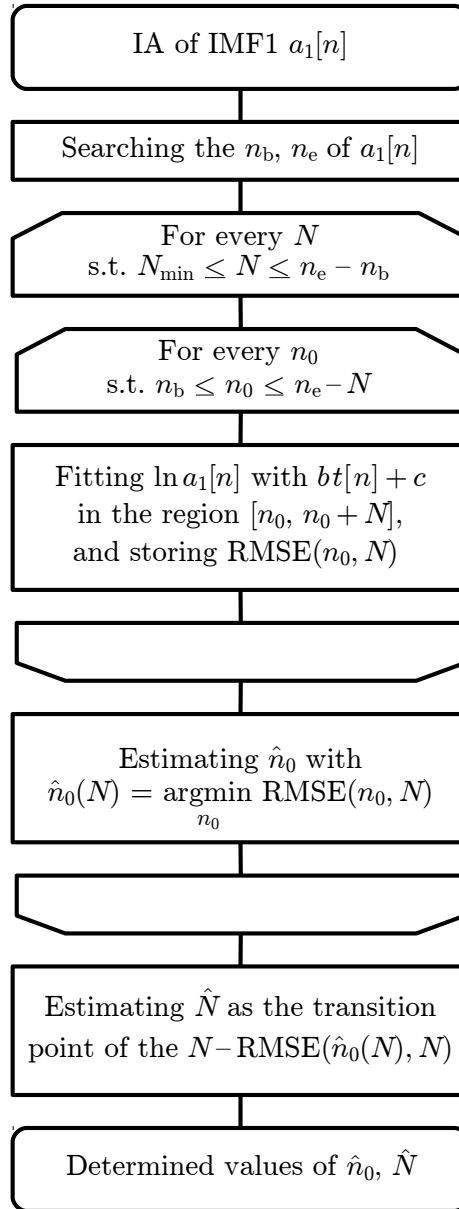


図 24: フィッティングの流れを示すフローチャート

具体的には、以下のように決める。

$$\hat{N} = \underset{N}{\text{argmin}} [\text{Err}(N_{\min}, N) + \text{Err}(N + 1, N_{\max})], \quad (6.43)$$

$$\text{Err}(N_1, N_2) = \min_{a,b} \sqrt{\frac{\sum_{N=N_1}^{N_2} (e(N) - (aN + b))^2}{N_2 - N_1}}, \quad (6.44)$$

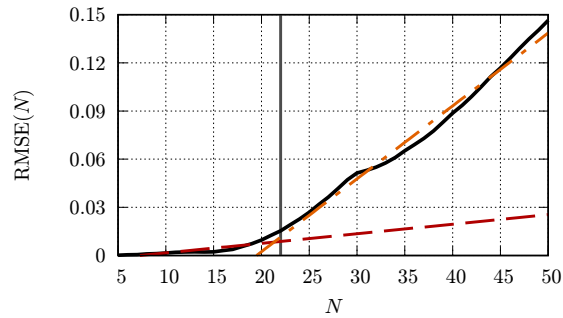
$$e(N) = \text{RMSE}(\hat{n}_0(N), N). \quad (6.45)$$

$N - \text{RMSE}(\hat{n}_0(N), N)$  グラフにおいて、ある点を境に傾きの異なる 2 つの直線で回帰したときの回帰誤差が最も小さくなる点を探すものであり、図で説明したものが図 25 である。

### 6.2.3 瞬時振幅と瞬時位相のフィッティング

IMF1 に QNM が抽出されているとして、式 (6.38) の対数を取ると

$$\ln a_1(t) = \omega_1 t - \omega_1 t_0 + \ln A_0 \quad (6.46)$$

図 25:  $\hat{N}$  の決め方を表した図

となる。決定された QDS  $[\hat{n}_0(\hat{N}), \hat{n}_0(\hat{N}) + \hat{N}]$  上で取得データの  $a_1[n]$  を線形関数  $bt[n] + c$  で回帰すると

$$\hat{\omega}_I = b, \quad \hat{A}_0 = \exp(c + bt[\hat{n}_0]) \quad (6.47)$$

として QNM 周波数の虚部と初期振幅が推定できる。また、式 (6.39) より、 $\phi_1[n]$  を  $dt[n] + e$  で線形回帰すれば、

$$\hat{\omega}_R = d, \quad \hat{\varphi}_0 = e + dt[\hat{n}_0] \quad (6.48)$$

として QNM 周波数の実部と初期位相が推定できる。

遠方から伝播してきた重力波は赤方偏移しているので、観測データから以上のように推定された QNM 周波数は  $1/(1+z)$  倍だけ小さくなっている。 $z$  は重力波源の天文学的赤方偏移パラメータである。重力波を用いて一般相対性理論の検証を行う際には、source frame での周波数、すなわち重力波の放射時点での周波数を考える必要がある。source frame での QNM 周波数を  $\omega^{\text{src}}$  とすると、

$$\hat{\omega}^{\text{src}} = (1+z)\hat{\omega} = (1+z)\hat{\omega}_R + i(1+z)\hat{\omega}_I \quad (6.49)$$

として推定する。以降、特に断りがないかぎり source frame での周波数で考えているとし、上付きの src は省略する。

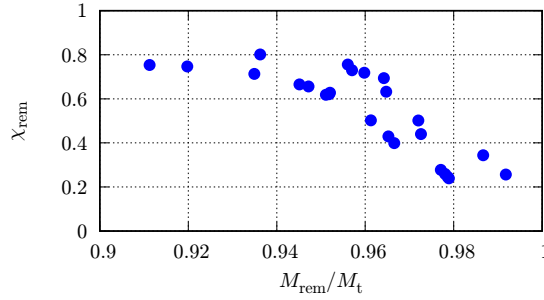


図 26: 使用した波形における合体後に形成されたブラックホールのパラメータの分布

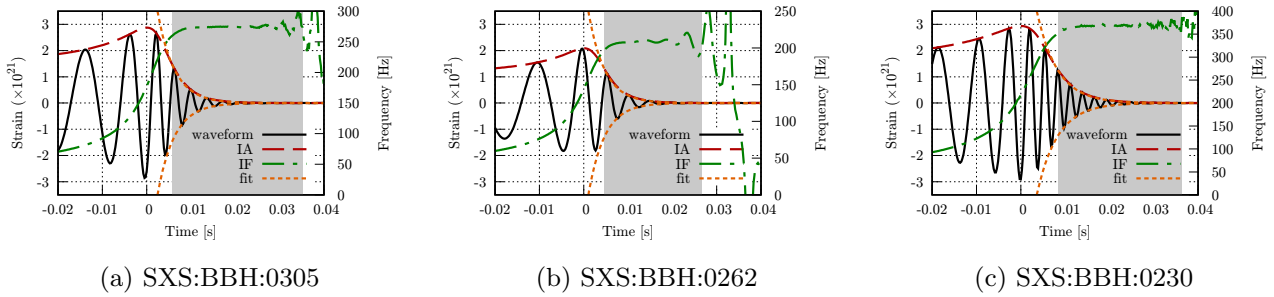


図 27: 代表的な 3 種類 (0305, 0262, 0232) のノイズ無しの波形に対して手法を適用した様子。黒線が波形、赤破線が瞬時振幅、緑一点鎖線が瞬時周波数をプロットしたものであり、灰色の領域が QDS を、オレンジの点線が QDS において IA をフィットして得られた指数関数とその符号反転を示している。

### 6.3 シミュレーション

前節で述べた手法の有効性を評価するためにシミュレーションを行った。BBH の数値シミュレーション波形としては SXS (Simulating eXtreme Spacetime) プロジェクトの提供する波形を用いた [61, 62]。GW150914 の検出後に公開された 96 種類の波形の中から 24 種類と、GW150914, GW151226 に最もよくフィットした波形の合わせて 26 種類を用いた。使用した波形について、合体後に形成されたブラックホールのパラメータの分布をプロットしたものが図 26 である。

2つのブラックホールの総質量  $M_{\text{total}}$  と、赤方偏移  $z$  あるいは光度距離  $d_L$  と宇宙論パラメータを与えることで、振幅と時間スケールを実際に地球で観測される波形へと調整できる。Kinugawa らの研究 [69] によって、重いブラックホールの質量分布は  $30M_{\odot}$  にピークを持つことがわかっているため、総質量は  $M_t = 60M_{\odot}$  とし、赤方偏移は GW150914, GW151226 における推定値を参考に  $z = 0.09$  とした。宇宙論パラメータは Planck プロジェクトの観測結果 [70] より、ハッブル定数  $H_0 = 67.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ 、物質密度パラメータ  $\Omega_m = 0.306$  を用いた。

まずはノイズを加えないデータについて手法を適用した。手法の働きを図示したものを図 27 に示す。代表的な 3 種類の波形について、その波形 (黒線) と瞬時振幅 (赤破線)、瞬時周波数 (緑一点鎖線) をプロットし、手法によって得られた QDS を灰色の区間で表しており、QDS にて IA をフィットした結果をオレンジの点線で示している。いずれの結果においても、QDS においてフィットした指数関数が IA とよく一致しており、かつ瞬時周波数が定数となっていることがわかる。これらは式 (6.37) からわかるように QDS において成り立っているべき要素であり、この手法によって正しく QDS が選べていると言える。



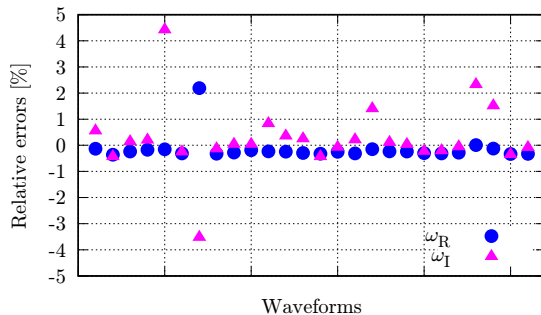
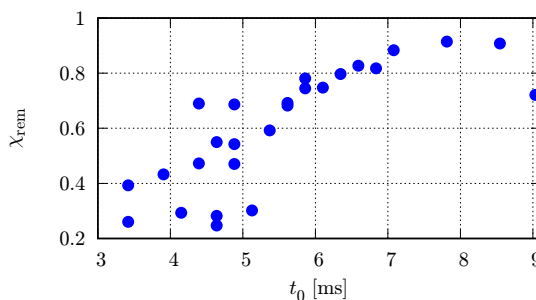


図 28: 各波形における QNM 周波数の推定値の相対誤差

表 4: QNM 周波数の相対誤差の平均値と最も悪い値

Relative errors [%]	$\omega_R$	$\omega_I$
Average value	0.32	0.70
Worst case	2.19	4.42

図 29: ノイズ無しの波形について手法を適用して得られた QNM の開始時刻  $t_0$  と、合体後のブラックホールのスピン  $\chi_{rem}$  の関係。相関係数は  $r = 0.764$ 。

SXS は公開している各波形について Metadata という形で、初期の連星パラメータや合体後のブラックホールのパラメータなどを記録して提供している。Metadata に記載されている合体後のブラックホールの質量  $M_{rem}/M_t$  とスピン  $\chi_{rem}$  から、Berti らによる対応表 [56, 57] を使って QNM 周波数を計算し、この手法で波形を解析して得られる値との比較を行った。相対誤差をグラフ化したものが図 28 であり、平均値と最も悪い値をまとめたものが表 4 である。多くの波形において相対誤差はほとんどゼロとなっていることがわかり、平均でも 1% 未満、最悪でも 5% 未満の精度で推定できることが確かめられた。以上より、ノイズ無しの波形あるいは SNR が非常に高い波形については、提案手法は効果を発揮すると言える。

推定した QNM の開始時刻  $t_0$  と合体後のブラックホールのスピン  $\chi_{rem}$  との関係をプロットしたものが図 29 である。この図から、これら 2 つの間には相関が存在していることがわかり、ピアソンの積率相関係数を計算した結果  $r = 0.764$  が得られた。これはスピンの大きさとそれだけ Merger が長くなることを示しており、Zhang らの議論 [71] とも一致している。

続いて、観測のシミュレーションとして人工的にノイズを加えた波形についての解析を行う。ノイズは Advanced LIGO のデザイン感度 (zero-detuned high-power sensitivity curve) [10] に従って、ガウスノイズを生成した。各波形に対してそれぞれ 1000 通りのノイズを生成し、そのノイズに波形を加えたデータセットを用意した。図 27 と同じ 3 つの波形について、ノイズを加えたシミュレーションを行って得られた

表 5: 図 27,30 で用いた 3 つの波形についての初期パラメータおよびノイズを加えた場合の SNR。

ID	0305	0262	0230
mass ratio $q$	1.22	3	1
initial spin $\chi_{1z}$	0.1	-0.6	0.8
initial spin $\chi_{2z}$	-0.09	0.0	0.8
SNR $\rho$	127.2	83.07	159.6

結果のヒストグラムを図 30 に示す。また、これらの波形についての初期パラメータとここで加えたノイズにおける最適 SNR をまとめたものを表 5 に示す。最適 SNR  $\rho$  は、波形  $h(t)$  と検出器の感度  $S_n(f)$  が与えられたときに

$$\rho = 2 \left( \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} \right)^{1/2} \quad (6.50)$$

と定義される。Allen らによるマッチドフィルタ解析の実装に関する論文 [72] を参考に、 $f_{\min} = 40$  Hz,  $f_{\max} = 2048$  Hz と設定した。

ノイズを加えた場合についての結果を見ると  $t_0$  は波形や SNR に関係なく小さい値を推定する傾向があることがわかる。このような誤差を生じる主な原因はモード分解が完全に行えていないことにある。言い換えると、EMD に頑健性が備わっていないことが原因である。図 31 に  $t_0$  の推定値がノイズ無しでの推定値 4.64 ms と近い値と取れた場合と、ヒストグラムにおいて最も頻度の高かった値の範囲での値を取った場合についてその分解のされ方を図示したものを示す。推定された  $t_0$  の値はそれぞれ 4.64 ms と 3.17 ms であった。黒線が IMF1, 赤破線が IMF1 の IA, 緑一点鎖線が IMF2 を表していて、灰色の領域とオレンジの点線は QDS とフィッティング曲線である。この 2 つを比べると、ノイズ無しでの推定値と近い値を取れた場合の方が IMF2 の振幅が小さくなっていることがわかる。これは 4.5.2 節で EMD の課題として挙げていた mode-splitting [24] である。

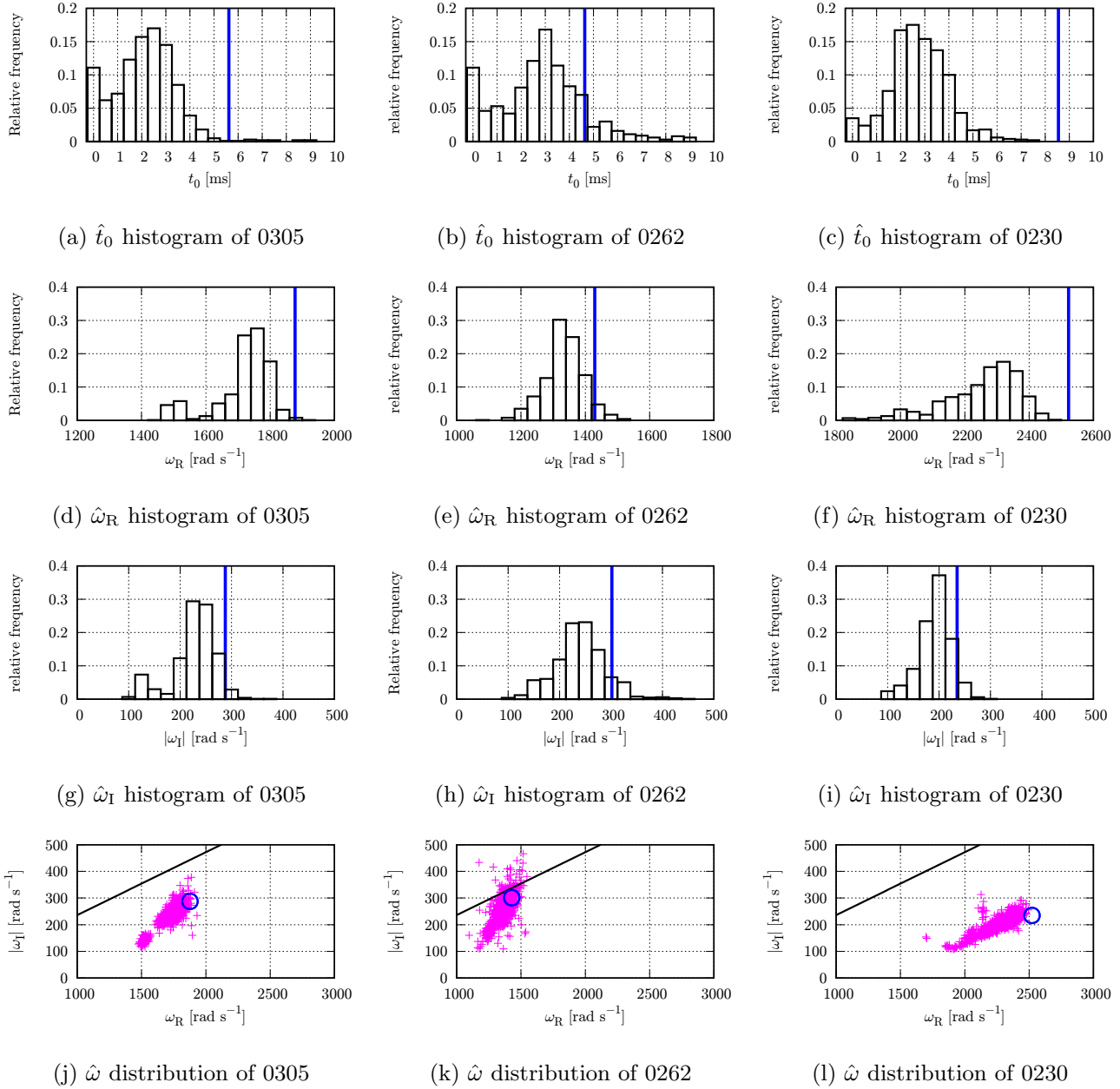


図 30: 観測データのシミュレーションとしてノイズを加えたデータを解析した結果。各波形について  $t_0$ ,  $\omega_R$ ,  $\omega_I$  の推定値のヒストグラムと,  $\omega_R$  と  $\omega_I$  の散布図を示している。ヒストグラムにある青実線はその位置がノイズ無しでの解析における推定値であることを示している。また, 散布図における黒実線はそれより上の領域が一般相対性理論において禁止されている領域であることを示している。

表 6: シミュレーションで推定された値

ID	$m_1/m_2$	$\chi_{1z}$	$\chi_{2z}$	$M_{\text{rem}}/M_t$	$\chi_{\text{rem}}$	$\omega_R/\text{rad s}^{-1}$	$ \omega_1 /\text{rad s}^{-1}$	$t_0/\text{ms}$	$\rho_{\text{TMR}}$	$\dot{t}_0/\text{ms}$	$\dot{\omega}_R/\text{rad s}^{-1}$	$ \dot{\omega}_1 /\text{rad s}^{-1}$
0209	1	-0.90	-0.50	0.965	0.46	1584	301	4.88	107.7	$2.2^{+1.2}_{-1.0}$	$1496^{+47.7}_{-56.3}$	$254^{+28.5}_{-27.7}$
0210	1	-0.90	+0.00	0.961	0.54	1668	297	4.88	114.6	$2.2^{+1.7}_{-1.7}$	$1578^{+53.4}_{-97.7}$	$247^{+41.2}_{-42.4}$
0211	1	-0.90	+0.90	0.951	0.68	1860	288	4.88	127.7	$2.2^{+1.7}_{-1.5}$	$1746^{+58.5}_{-120.8}$	$241^{+38.8}_{-44.6}$
0212	1	-0.80	-0.80	0.967	0.43	1553	302	3.91	105.0	$2.4^{+1.7}_{-2.2}$	$1474^{+54.2}_{-105.0}$	$254^{+44.5}_{-65.4}$
0218	1	-0.50	+0.50	0.952	0.69	1862	288	9.03	128.7	$2.2^{+1.7}_{-1.5}$	$1746^{+59.2}_{-103.6}$	$262^{+41.1}_{-51.5}$
0221	1	-0.40	+0.80	0.945	0.74	1974	281	5.86	135.7	$2.4^{+1.2}_{-1.7}$	$1850^{+53.2}_{-117.6}$	$240^{+26.2}_{-38.3}$
0223	1	+0.30	+0.00	0.947	0.73	1946	283	4.39	133.9	$2.2^{+1.7}_{-1.2}$	$1820^{+57.5}_{-133.2}$	$253^{+42.8}_{-47.8}$
0230	1	+0.80	+0.80	0.911	0.91	2515	235	8.54	159.6	$2.9^{+1.2}_{-1.0}$	$2300^{+76.9}_{-143.4}$	$208^{+23.4}_{-32.1}$
0231	1	+0.90	+0.00	0.935	0.82	2149	268	6.84	145.4	$2.4^{+1.5}_{-1.2}$	$1991^{+68.7}_{-127.0}$	$223^{+33.2}_{-33.1}$
0232	1	+0.90	+0.50	0.920	0.88	2390	247	7.08	156.2	$2.9^{+1.2}_{-1.5}$	$2203^{+71.9}_{-167.5}$	$213^{+37.0}_{-43.9}$
0259	2.5	+0.00	+0.00	0.967	0.58	1699	293	5.37	105.9	$2.0^{+1.7}_{-1.5}$	$1593^{+64.8}_{-91.8}$	$234^{+40.1}_{-43.7}$
0262	3	-0.60	+0.00	0.978	0.27	1426	303	4.64	83.1	$3.2^{+1.5}_{-2.0}$	$1352^{+57.9}_{-50.0}$	$252^{+43.7}_{-43.8}$
0263	3	-0.60	+0.60	0.977	0.29	1440	303	5.13	86.1	$2.7^{+1.7}_{-1.7}$	$1365^{+59.1}_{-46.1}$	$245^{+44.5}_{-39.7}$
0264	3	-0.60	-0.60	0.979	0.25	1412	303	4.64	80.8	$3.2^{+1.5}_{-2.4}$	$1345^{+53.0}_{-77.5}$	$253^{+45.2}_{-63.2}$
0265	3	-0.60	-0.40	0.979	0.26	1416	303	3.42	80.6	$2.7^{+1.7}_{-2.7}$	$1342^{+56.7}_{-86.7}$	$244^{+47.2}_{-63.8}$
0274	3	-0.23	+0.85	0.973	0.47	1576	298	4.39	95.4	$2.7^{+2.0}_{-2.2}$	$1490^{+59.6}_{-83.7}$	$234^{+52.0}_{-51.5}$
0276	3	+0.30	+0.00	0.972	0.53	1637	295	4.64	96.3	$2.4^{+1.5}_{-1.7}$	$1539^{+59.3}_{-60.0}$	$235^{+44.7}_{-37.5}$
0283	3	+0.30	+0.30	0.965	0.68	1828	285	5.62	107.8	$2.7^{+1.2}_{-1.5}$	$1710^{+59.5}_{-85.3}$	$230^{+36.3}_{-40.4}$
0287	3	+0.60	-0.60	0.960	0.78	2012	270	5.86	111.7	$2.2^{+1.5}_{-1.5}$	$1852^{+76.5}_{-136.5}$	$214^{+35.7}_{-43.9}$
0289	3	+0.60	+0.00	0.957	0.80	2054	267	6.35	115.8	$2.2^{+1.5}_{-1.2}$	$1897^{+70.4}_{-139.5}$	$216^{+35.3}_{-42.2}$
0292	3	+0.73	-0.85	0.956	0.83	2128	259	6.59	114.5	$2.2^{+1.5}_{-1.7}$	$1955^{+73.2}_{-171.8}$	$208^{+38.1}_{-42.7}$
0293	3	+0.85	+0.85	0.936	0.91	2478	224	7.81	132.1	$2.4^{+2.4}_{-1.2}$	$2239^{+106.0}_{-216.5}$	$183^{+37.8}_{-49.4}$
0297	6.5	+0.00	+0.00	0.987	0.35	1467	298	3.42	64.6	$2.7^{+1.7}_{-2.4}$	$1377^{+71.6}_{-82.3}$	$218^{+60.1}_{-57.4}$
0303	10	+0.00	+0.00	0.992	0.26	1400	299	4.15	49.4	$2.2^{+2.0}_{-2.2}$	$1294^{+77.0}_{-77.6}$	$200^{+68.3}_{-55.4}$
0305	1.22	+0.10	-0.09	0.952	0.69	1871	287	5.62	127.2	$2.4^{+1.2}_{-1.5}$	$1759^{+50.1}_{-92.0}$	$246^{+30.3}_{-34.6}$
0317	3.33	+0.30	-0.02	0.964	0.75	1937	275	6.10	107.2	$2.0^{+1.5}_{-1.2}$	$1803^{+62.5}_{-95.0}$	$218^{+37.0}_{-34.4}$

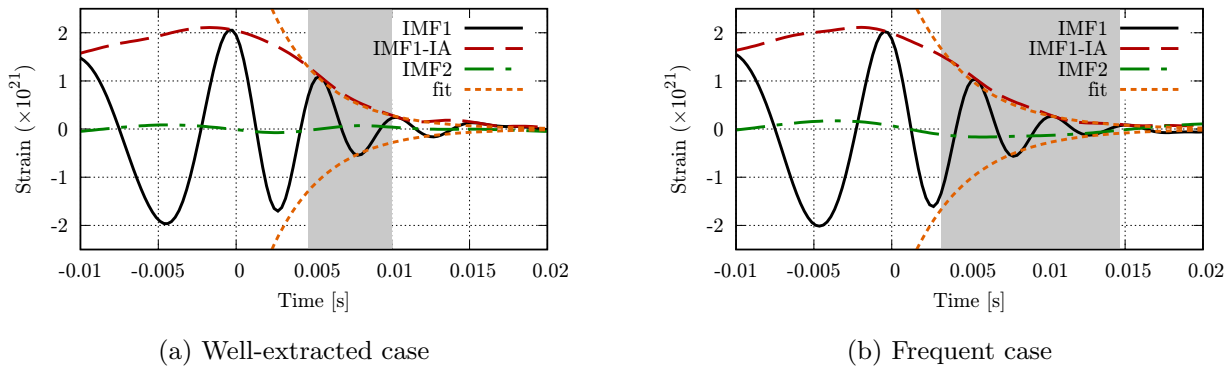


図 31: 0262 の波形についてのモード分解の結果の 2 例。31(a) は  $t_0$  の推定値がノイズ無しの場合と近い値であった場合のもので、31(b) は  $t_0$  の推定値が図 30(b) のヒストグラムで最も頻度の高い bin の値を取った場合のものである。

## 6.4 実観測データへの適用

ここでは構築した手法を LIGO Hanford での GW150914 の実観測データ [73] へと適用した結果について述べる。まず実観測データの Spectral strain sensitivity を図 32(a) に示す。いくつかの強いラインノイズが含まれていることがわかる。ラインノイズの削除と帯域の取り出しのためにかけたフィルタの設定を表 7 に、フィルタをかけたあとの Spectral strain sensitivity を図 32(b) に示す。

図 33 に手法の適用した様子として、IMF1 とその IA、そして推定された QDS とフィッティングした曲線を示す。これは図 31(a) の結果と似た結果であり、実観測データに対してもこの手法の推定精度はシミュレーションでのものと同等であると言える。推定されたパラメータを表 8 に示す。Source frame での値の計算においては、LIGO によるパラメータ推定の論文 [74] をもとに、赤方偏移を  $z = 0.09$ 、光度距離を  $d_L = 410$  Mpc とした。また、 $\chi_{\text{rem}}$  と  $M_{\text{rem}}$  の計算においては、QNM のモードを  $(l, m, n) = (2, 2, 0)$  と仮定して Berti の対応表 [56, 57] を用いた。この表における誤差の表示は HHT をかけたあとのデータにおいて瞬時振幅や瞬時位相をフィッティングした際の標準偏差であり、EMD における分解の揺らぎの影響は考慮していない。なお、対応する周波数と減衰係数の値は  $f = \omega_R/2\pi = 266 \pm 1.6$  Hz,

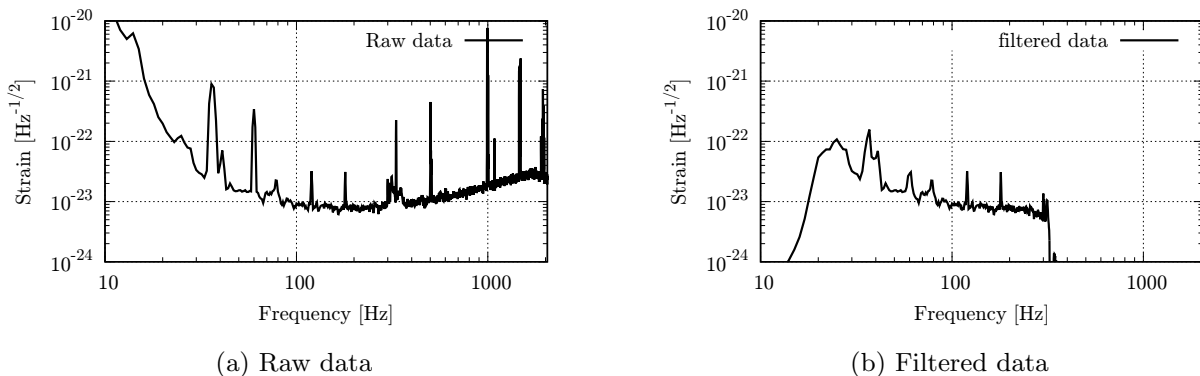


図 32: GW150914 の実観測データの Spectral strain sensitivity。左がフィルタをかける前で右がフィルタをかけた後のものである。かけたフィルタの設定は表 7 に示す。

表 7: GW150914 の実観測データにかけたフィルタの設定。フィルタは Butterworth フィルタをもとにした IIR フィルタであり、フィルタ次数はすべて 4 としている。 $f_{\text{central}}$  がノッチフィルタのストップバンドの中心周波数、 $\Delta f_{\text{pass}}$  はパスバンド間の差、 $\Delta f_{\text{stop}}$  はストップバンドのバンド幅を表している。

Properties of notch filters [Hz]			
	$f_{\text{central}}$	$\Delta f_{\text{pass}}$	$\Delta f_{\text{stop}}$
Notch 1	36	1	0.1
Notch 2	40	1	0.1
Notch 3	60	1	0.1
Notch 4	331	10	1
Cutoff frequencies [Hz]			
	lower	upper	
Bandstop	330.8	671.6	
Bandpass	20.0	320.0	

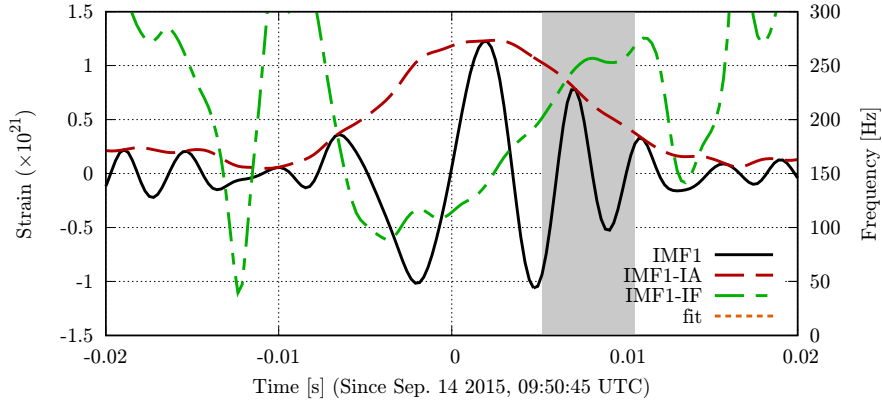


図 33: GW150914 の実観測データに手法を適用した様子。

表 8: GW150914 の実観測データに手法を適用して得られたパラメータ。

$\hat{t}_0/\text{ms}$	$\hat{\omega}_R/\text{rad s}^{-1}$	$ \hat{\omega}_I /\text{rad s}^{-1}$	$\hat{\chi}_{\text{rem}}$	$\hat{M}_{\text{rem}}/M_{\odot}$
5.223	$1670 \pm 9.96$	$211.2 \pm 3.13$	$0.8151^{+0.092}_{-0.096}$	$71.65^{+0.77}_{-0.75}$

$\tau = 1/|\omega_I| = 4.73 \pm 0.07 \text{ ms}$  である。

$\chi_{\text{rem}}$  や  $M_{\text{rem}}$  の値は LIGO の論文 [8] でのものよりも大きい値となっている。これは図 30 で見せたように、ノイズが含まれる場合においては推定値に系統誤差が含まれることが原因であると考えられる。

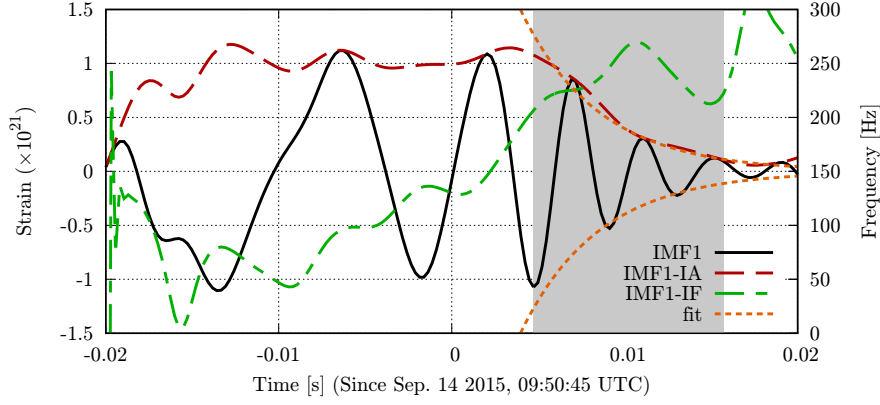


図 34: GW150914 の実観測データに改良した手法を適用した様子。

表 9: GW150914 の実観測データに改良した手法を適用して得られたパラメータ。

$\hat{t}_0/\text{ms}$	$\hat{\omega}_R/\text{rad s}^{-1}$	$ \hat{\omega}_I /\text{rad s}^{-1}$	$\hat{\chi}_{\text{rem}}$	$\hat{M}_{\text{rem}}/M_{\odot}$
4.734	$1661 \pm 6.88$	$240.6 \pm 3.65$	$0.733^{+0.013}_{-0.013}$	$67.03^{+0.74}_{-0.72}$

## 6.5 モード抽出条件の改良

前述の手法では、mode-splitting が回避できずに、推定値に系統誤差が含まれてしまうということが明らかになった。この問題をパラメータ選択によって緩和して結果を改善することを考える。6.2.1 節の式 (6.40) に示したように、元的手法では区間  $[t_m, t_m + T_m]$  における IMF1 のエネルギーが最大になるパラメータを選択し、そのパラメータにおいて QDS を探していた。しかしながら、この条件は QNM が抽出できているかどうかということについての直接的な指定になっていない。そこで新たな指標として、正しい QDS においては IF が一定となるはずであるから、推定された QDS における IF の線形回帰の傾きの小ささを考える。すなわち、全てのパラメータの候補値について QDS の推定を行い、その推定された QDS において IMF1 の IF の線形回帰を  $at[n] + b$  とすると、 $|a|$  が最も小さくなるようにパラメータを選ぶということである。この際、IMF1 に QNM を含む成分が抽出されていることを保証するために、区間  $[t_m, t_m + T_m]$  において、バンドパスフィルタをかけた後のデータのエネルギーのうち 80 % 以上が IMF1 に分解されていることを制約条件とする。以上を式で表すと、

$$(\hat{f}_H, \hat{\sigma}_e, \hat{\epsilon}_e) = \underset{f_H, \sigma_e, \epsilon_e}{\operatorname{argmin}} |a|, \quad \text{subject to} \quad \int_{t_m}^{t_m+T_m} |\text{IMF}_1(t)|^2 dt \geq 0.8E_0, \quad (6.51)$$

$$E_0 = \int_{t_m}^{t_m+T_m} |s_{\text{filtered}}(t)|^2 dt \quad (6.52)$$

である。

図 34 にこの改良した手法を GW150914 の実観測データに適用した様子を示す。図 33 と比べると、より IF が一定値に近い性質を持っている区間を選んでいることがわかる。この場合のパラメータの推定結果が表 9 である。この結果は LIGO の論文 [8] に記載されている結果と非常に近い値であり、推定性能が向上したことが伺える。

また、SXS の波形に対して同様なシミュレーションを行った。図 30 に示したものと同様な代表的な 3 つの波形に対する結果を図 35 に示す。全ての波形に対しての推定結果をまとめたものが表 10 である。QNM 開始時刻  $t_0$  のヒストグラムについては、系統誤差のある程度の低減が確認できるものの、まだ誤差が大きい結果となっている。一方で、QNM 周波数  $\omega_R, \omega_I$  については、ヒストグラムの形がよりシャープになり、ノイズ無しでの推定値のより近くに分布するようになったことがわかる。すなわち、手法を改良したことによる系統誤差および統計誤差の両方が低減できている。

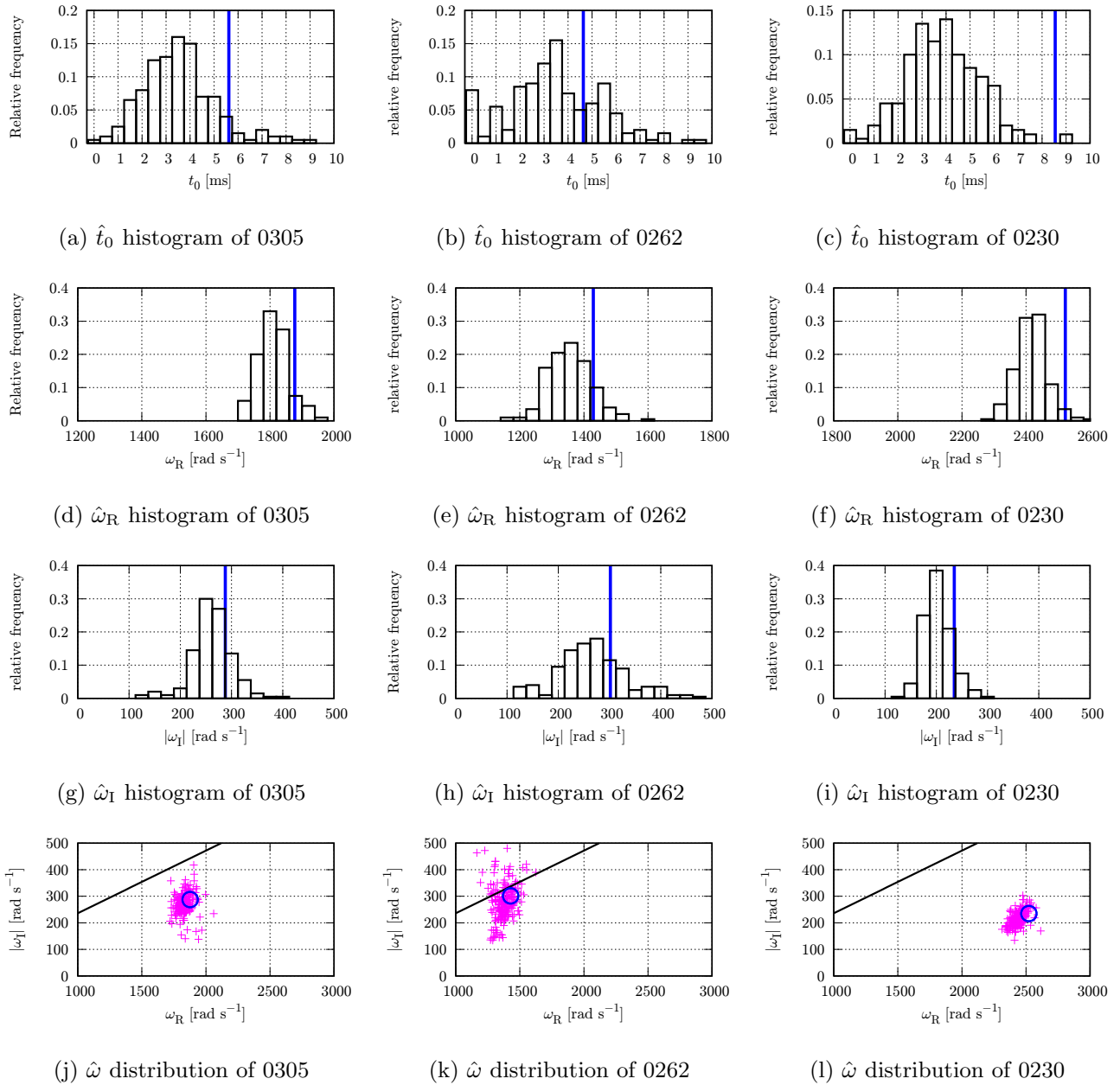


図 35: 改良した手法での推定結果のヒストグラムと散布図。対象とした波形や図の設定などは図 30 と同じである。



表 10: 改良した手法での SXS 波形に対するシミュレーション結果

ID	$m_1/m_2$	$\chi_{1z}$	$\chi_{2z}$	$M_{\text{rem}}/M_t$	$\chi_{\text{rem}}$	$\omega_R/\text{rad s}^{-1}$	$ \omega_1 /\text{rad s}^{-1}$	$t_0/\text{ms}$	$\rho_{\text{TMR}}$	$t_0/\text{ms}$	$\dot{t}_0/\text{ms}$	$\dot{\omega}_R/\text{rad s}^{-1}$	$ \dot{\omega}_1 /\text{rad s}^{-1}$
0305	1.22	+0.10	-0.09	0.952	0.69	1871	287	5.62	127.2	3.7 <sup>+1.5</sup> <sub>-1.2</sub>	1831 <sup>+41.9</sup> <sub>-43.1</sub>	273 <sup>+35.9</sup> <sub>-32.3</sub>	
0317	3.33	+0.30	-0.02	0.964	0.75	1937	275	6.10	107.2	3.4 <sup>+2.2</sup> <sub>-1.7</sub>	1886 <sup>+61.1</sup> <sub>-63.7</sub>	239 <sup>+56.4</sup> <sub>-38.7</sub>	
0209	1	-0.90	-0.50	0.965	0.46	1584	301	4.88	107.7	3.2 <sup>+2.0</sup> <sub>-1.5</sub>	1540 <sup>+68.9</sup> <sub>-54.1</sub>	283 <sup>+61.7</sup> <sub>-53.3</sub>	
0210	1	-0.90	+0.00	0.961	0.54	1668	297	4.88	114.6	3.7 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.7</sub>	1629 <sup>+56.0</sup> <sub>-48.7</sub>	277 <sup>+67.6</sup> <sub>-36.2</sub>	
0211	1	-0.90	+0.90	0.951	0.68	1860	288	4.88	127.7	3.7 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.7</sub>	1825 <sup>+48.6</sup> <sub>-41.1</sub>	278 <sup>+48.6</sup> <sub>-32.0</sub>	
0212	1	-0.80	-0.80	0.967	0.43	1553	302	3.91	105.0	3.4 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.5</sub>	1508 <sup>+50.6</sup> <sub>-58.9</sub>	287 <sup>+43.5</sup> <sub>-46.2</sub>	
0218	1	-0.50	+0.50	0.952	0.69	1862	288	9.03	128.7	3.7 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.5</sub>	1806 <sup>+54.2</sup> <sub>-47.2</sub>	317 <sup>+64.0</sup> <sub>-53.2</sub>	
0221	1	-0.40	+0.80	0.945	0.74	1974	281	5.86	135.7	3.4 <sup>+1.5</sup> <sub>-1.0</sub>	1932 <sup>+48.5</sup> <sub>-44.3</sub>	261 <sup>+45.2</sup> <sub>-29.2</sub>	
0223	1	+0.30	+0.00	0.947	0.73	1946	283	4.39	133.9	3.2 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.5</sub>	1883 <sup>+46.3</sup> <sub>-46.5</sub>	287 <sup>+38.5</sup> <sub>-46.6</sub>	
0230	1	+0.80	+0.80	0.911	0.91	2515	235	8.54	159.6	4.2 <sup>+1.5</sup> <sub>-1.5</sub>	2438 <sup>+42.3</sup> <sub>-46.5</sub>	214 <sup>+28.4</sup> <sub>-26.3</sub>	
0231	1	+0.90	+0.00	0.935	0.82	2149	268	6.84	145.4	3.7 <sup>+1.5</sup> <sub>-1.2</sub>	2100 <sup>+41.6</sup> <sub>-35.3</sub>	248 <sup>+34.9</sup> <sub>-35.4</sub>	
0232	1	+0.90	+0.50	0.920	0.88	2390	247	7.08	156.2	3.9 <sup>+1.2</sup> <sub>-1.5</sub>	2320 <sup>+39.8</sup> <sub>-36.3</sub>	221 <sup>+29.3</sup> <sub>-22.8</sub>	
0262	3	-0.60	+0.00	0.978	0.27	1426	303	4.64	83.1	3.7 <sup>+2.0</sup> <sub>-1.7</sub>	1376 <sup>+66.1</sup> <sub>-66.3</sub>	277 <sup>+64.0</sup> <sub>-56.3</sub>	
0263	3	-0.60	+0.60	0.977	0.29	1440	303	5.13	86.1	3.2 <sup>+2.2</sup> <sub>-2.0</sub>	1381 <sup>+54.1</sup> <sub>-60.6</sub>	264 <sup>+63.4</sup> <sub>-67.5</sub>	
0264	3	-0.60	-0.60	0.979	0.25	1412	303	4.64	80.8	3.4 <sup>+1.2</sup> <sub>-1.7</sub>	1360 <sup>+52.8</sup> <sub>-46.9</sub>	257 <sup>+55.2</sup> <sub>-37.9</sub>	
0265	3	-0.60	-0.40	0.979	0.26	1416	303	3.42	80.6	3.4 <sup>+1.5</sup> <sub>-2.0</sub>	1358 <sup>+63.8</sup> <sub>-51.9</sub>	263 <sup>+57.2</sup> <sub>-55.6</sub>	
0274	3	-0.23	+0.85	0.973	0.47	1576	298	4.39	95.4	3.9 <sup>+2.0</sup> <sub>-1.7</sub>	1522 <sup>+65.7</sup> <sub>-54.3</sub>	276 <sup>+59.0</sup> <sub>-57.7</sub>	
0276	3	+0.30	+0.00	0.972	0.53	1637	295	4.64	96.3	3.2 <sup>+2.0</sup> <sub>-1.5</sub>	1580 <sup>+65.7</sup> <sub>-50.9</sub>	261 <sup>+50.5</sup> <sub>-45.2</sub>	
0283	3	+0.30	+0.30	0.965	0.68	1828	285	5.62	107.8	3.9 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.7</sub>	1781 <sup>+52.2</sup> <sub>-49.6</sub>	261 <sup>+55.2</sup> <sub>-39.3</sub>	
0287	3	+0.60	-0.60	0.960	0.78	2012	270	5.86	111.7	3.7 <sup>+2.0</sup> <sub>-1.5</sub>	1962 <sup>+58.1</sup> <sub>-49.7</sub>	243 <sup>+43.7</sup> <sub>-36.3</sub>	
0289	3	+0.60	+0.00	0.957	0.80	2054	267	6.35	115.8	3.4 <sup>+1.5</sup> <sub>-1.2</sub>	1998 <sup>+55.2</sup> <sub>-45.9</sub>	236 <sup>+36.8</sup> <sub>-35.1</sub>	
0292	3	+0.73	-0.85	0.956	0.83	2128	259	6.59	114.5	3.4 <sup>+1.7</sup> <sub>-1.5</sub>	2062 <sup>+46.2</sup> <sub>-38.4</sub>	229 <sup>+41.1</sup> <sub>-34.5</sub>	
0293	3	+0.85	+0.85	0.936	0.91	2478	224	7.81	132.1	4.2 <sup>+1.2</sup> <sub>-2.0</sub>	2383 <sup>+53.0</sup> <sub>-61.0</sub>	192 <sup>+34.5</sup> <sub>-27.2</sub>	
0297	6.5	+0.00	+0.00	0.987	0.35	1467	298	3.42	64.6	2.9 <sup>+1.7</sup> <sub>-2.4</sub>	1405 <sup>+57.8</sup> <sub>-75.4</sub>	225 <sup>+71.8</sup> <sub>-66.1</sub>	
0303	10	+0.00	+0.00	0.992	0.26	1400	299	4.15	49.4	2.2 <sup>+2.0</sup> <sub>-2.4</sub>	1312 <sup>+83.5</sup> <sub>-69.0</sub>	194 <sup>+69.5</sup> <sub>-58.4</sub>	

## 7 まとめ

本論文では、重力波のデータ解析に対して Hilbert-Huang 変換 (HHT) を応用する研究についての報告を行った。前半では背景として重力波天文学に関して概説し、重力波の観測データにはノイズが多く含まれるために、データ解析が重要であることを確認した。そして、現在主流となって行われているデータ解析手法であるマッチドフィルタ解析について、その原理と適用範囲について解説し、波形の予測が困難な場合に関しては、マッチドフィルタ解析では扱えずに他の手法と使い分ける必要が有ることを確認した。

HHT は比較的新しく提唱された時間-周波数解析手法であり、モード分解の基底をデータから適合的に選ぶことによって不確定性原理による大域的な分解能の制限がないことが特徴であり、短い時間に周波数が発展するデータの解析や、モードの切り替わり時刻の推定などに有効だと考えられている。ただし、重力波の観測データにはノイズが多く含まれ、その上、重力波がいつ入射してくるかはわからないために常時ノイズのみを観測しているという状況が想定される。したがって、HHT を重力波のデータ解析へと応用するにあたっては、ノイズに対する HHT の性能評価を行うことは有用である。本論文では、ノイズに対して HHT 解析を行った際の挙動を解析的・統計的に考察した。その結果、ノイズの各固有モード関数 (IMF) の瞬時振幅 (IA) や瞬時周波数 (IF) の区間平均の分布をピアソン分布を用いて精度良く推定できることを明らかになった。また、それを異常検知の枠組みに応用し、シミュレーションによって正しく動作することを確認した。

連星ブラックホール合体重力波の解析への HHT の応用に取り組み、合体後のブラックホールの準固有振動の開始時刻および振動パラメータの推定を行う手法を構築し、その性能評価をおこなった。評価の結果、ノイズが含まれる場合に関しては改善点が見つかり、その問題を解決した改善手法をさらに提案した。改善手法においては振動数の推定において系統誤差と統計誤差をともに低減することに成功し、2015年に LIGO が観測した重力波の実観測データに対して適用したところ、LIGO の解析結果と非常によく一致する結果を得ることができた。

今回構築した手法において、HHT 内部のモード分解については EEMD と呼ばれるアルゴリズムを使用した。その上で、パラメータ選択において、対象となるブラックホールの準固有振動の成分がよりよく抽出できているパラメータを探すという方法を取った。モード分解自体において、対象の成分をよりよく抽出することに特化したような改良を行えばさらなる性能向上が期待できる。また、Denoising autoencoder などのノイズ除去の手法との組合せることで、HHT の弱点である頑健性の低さを補償することが可能になると考えている。これらの発展について、今後取り組んでいく。

## 謝辞

博士後期課程進学から本博士論文をまとめるまで、非常に多くの方々にご指導およびご協力をいただきました。この場をお借りしましてお礼申し上げます。指導教員の高橋弘毅准教授は重力波のデータ解析という魅力的な研究テーマを与えてくださり、この3年間とても親切にご指導ご協力いただきました。誠にありがとうございました。新潟大学の大原謙一教授とは、研究の内容面や方向性について頻りに議論させていただきました。また、論文執筆の際には非常に丁寧なご添削をいただきました。おかげさまで内容および自分の理解を深めることができました。ありがとうございました。東京大学宇宙線研究所の田越秀行准教授には重力波のデータ解析というテーマに取り組むに当たっての深いご助言をたくさんいただきました。特に従来のデータ解析手法に関する考え方などについて適切なご解説をいただきました。ありがとうございました。副査を勤めてくださった本学情報・経営工学専攻の湯川高志教授と山田耕一教授には、重力波のデータ解析という身近ではないテーマにも関わらず、事前審査および本審査におきまして説明が不足している点や論文のまとめ方に関しての適切なご指導をいただきました。ありがとうございました。龍谷大学の中野寛之准教授はブラックホールの準固有振動に関する深い造詣を持ち、結果の吟味や解析の設定を考える際に多くの有益なご助言をいただきました。ありがとうございました。大阪市立大学の神田展行教授には重力波の研究に取り組む中で、一緒に仕事をさせていただきながら、研究に関する考え方や取り組み方など非常に多くのことを学ばせていただきました。ありがとうございました。KAGRA プロジェクトおよび新学術領域研究『重力波天体の多様な観測による宇宙物理学の新展開』と『重力波物理学・天文学：創世記』に参画させていただく中で、データ解析と実験との関係や、データ解析と理論の関係についての知見を深めることができました。KAGRA プロジェクト PI の梶田隆章教授、副 PI の大橋正健教授を始めとする KAGRA プロジェクトのメンバー、および新学術領域の研究代表であった中村卓志名誉教授と田中貴浩教授を始めとする研究分担者や協力者の皆さまに改めまして感謝申し上げます。そして、数理工学・宇宙物理学研究室の先輩後輩の皆さんのおかげで、特に落ち込んだり苦しんだりすることなく、非常に穏やかに研究に取り組んでいくことができました。ありがとうございました。本論文では、LIGO Open Science Center (<https://losc.ligo.org>) の提供する観測データおよび Simulating eXtreme Spacetimes グループの生成したシミュレーション波形を使用させていただきましたことをここに感謝申し上げます。

最後に、不規則な生活になってしまい多くの迷惑をかけながらも、毎日暖かく迎え入れてくれる母を始めとする家族に心からの感謝を申し上げます。

## 付録 A 検出器の感度曲線に基づいたガウスノイズの生成

重力波の観測データの解析のシミュレーションにおいては、検出器の感度曲線に基づいて生成したガウスノイズに、重力波のシミュレーション波形を加え合わせたデータを解析するという方法がよく用いられる。本章では、このシミュレーションデータの生成についてまとめる。

LIGO や KAGRA などの重力波検出器の目標感度はパワースペクトル密度または振幅スペクトル密度の形式で公開されている。まずパワースペクトル密度や振幅スペクトル密度についての定義について述べ、その後、振幅スペクトル密度からガウスノイズの時系列データを得るための処理について述べる。

### A.1 標本信号による Fourier 変換の推定

ある時間信号  $s(t)$  の Fourier 変換  $\tilde{s}(f)$  を一定標本間隔  $\Delta t$  での  $s(t)$  の標本信号  $s_n = s(n\Delta t)$  から推定することを考える。物理量としての実在が連続時間の実関数であったとしても、コンピュータでその信号を扱う際には、離散的に標本化された有限のデータとして扱う必要があるので、この推定を考察しておくことは有用である\*2。まず、Fourier 変換の定義

$$\tilde{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t) e^{-i2\pi ft} \quad (\text{A.1})$$

の積分を区分求積の形で近似すると、

$$\begin{aligned} \tilde{s}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta t s(n\Delta t) e^{-i2\pi fn\Delta t} \\ &= \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{-i2n\pi f\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで標本化周波数を  $f_s = 1/\Delta t$  としたとき、 $\omega = 2\pi f\Delta t = 2\pi f/f_s$  を正規化周波数といい、

$$\tilde{s}(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{-in\omega} \quad (\text{A.3})$$

を離散時間信号  $s_n$  の離散時間 Fourier 変換 (DTFT: Discrete-time Fourier transform) という。逆離散時間 Fourier 変換は

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \tilde{s}(e^{i\omega}) e^{in\omega} \quad (\text{A.4})$$

である。離散時間 Fourier 変換に係数  $\Delta t$  をかけることで Fourier 変換を近似できることがわかる。

しかしながら、コンピュータで扱えるのは有限の長さのデータだけであるので、 $n$  の範囲は有限にしなければならない。 $n$  の範囲を  $n = 0, \dots, N-1$  とし、 $T = N\Delta t$  とする。そして、信号  $s(t)$  は区間  $[0, T)$  を全区間として定義されるものとする。つまりこの区間の外に  $s(t)$  は成分を持たないということである\*3。したがって、 $\tilde{s}(f)$  は

$$\tilde{s}(f) = \int_0^T dt s(t) e^{-2\pi ft} \quad (\text{A.5})$$

\*2 量子化も必要であるがここでは標本化のみを考える。

\*3  $s(t)$  の周期が  $T$  であると考えているわけではないことに注意。周期信号であればそもそもフーリエ変換は定義できず、フーリエ級数展開して離散的な周波数成分を取り出す。フーリエ級数展開を区分求積近似することで離散 Fourier 変換が得られる。

である。この積分を区分求積の形で近似すると、

$$\tilde{s}(f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2n\pi f \Delta t} \quad (\text{A.6})$$

となる。また、全区間長が  $T$  ということは、この信号に含まれる正しく表現できる周波数成分の周波数は  $\Delta f = 1/T$  の整数倍の  $k\Delta f$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) に限られるということになるので、 $\tilde{s}(f_k)$  について考えると、

$$\begin{aligned} \tilde{s}(f_k) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2\pi n k \Delta f \Delta t} \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2\pi n k / N} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる。途中、 $\Delta t \Delta f = 1/N$  を使った。このようにして、標本信号  $s_n$  から元の信号の Fourier 変換を近似できる。標本信号  $s_n$  ( $n = 0, \dots, N$ ) について、

$$\tilde{s}_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2\pi n k / N}, \quad (k = 0, \dots, N-1) \quad (\text{A.8})$$

を  $s_n$  の離散 Fourier 変換 (DFT: Discrete Fourier transform) という。逆離散 Fourier 変換は

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}_k e^{2\pi n k / N} \quad (\text{A.9})$$

である。元信号の標本信号  $s_n$  を使った Fourier 変換の近似  $\tilde{s}(f_k)$  とその標本信号の離散 Fourier 変換  $\tilde{s}_k$  の間には

$$\tilde{s}(f_k) = \tilde{s}_k \Delta t \quad (\text{A.10})$$

という関係が成り立っている。FFTW などの離散 Fourier 変換の計算ライブラリを使って、Fourier 変換の近似を計算する際には係数が必要となる。係数間での主な関係式を以下にまとめておく。

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad \Delta f = \frac{1}{T}, \quad \Delta t \Delta f = \frac{1}{N}. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 パワースペクトル密度

ある信号  $s(t)$  の自己相関関数を  $C(t, \tau)$  とすると、その定義は、

$$C(t, \tau) = \langle s(t)s(t+\tau) \rangle \quad (\text{A.12})$$

である。記号  $\langle \cdot \rangle$  はアンサンブル平均を意味する。 $s(t)$  にエルゴード性、つまりアンサンブル平均は長時間平均に置き換えることができることを仮定すると、自己相関関数は  $\tau$  のみに依存することになるので、そ

れをあらためて  $R(\tau)$  とおくと,

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt s(t)s(t+\tau) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{s}(f)e^{i2\pi ft} \tilde{s}(f')e^{i2\pi f'(t+\tau)} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{s}(f)\tilde{s}(f')e^{i2\pi f'\tau} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i2\pi(f'+f)t} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{s}(f)\tilde{s}(f')e^{i2\pi f'\tau} \delta(f'+f) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} df \tilde{s}(f)\tilde{s}(-f)e^{-i2\pi f\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} df \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \tilde{s}(f)\tilde{s}(-f) \right] e^{-i2\pi f\tau} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} df \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\tilde{s}(f)|^2 \right] e^{-i2\pi f\tau} \tag{A.13}
\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\tilde{s}(f)|^2 \tag{A.14}$$

とおけば,  $P(f)$  と  $R(\tau)$  の Fourier 変換対の関係にあると言える。また,  $R(0)$  は  $R(0) = \langle s(t)^2 \rangle$  つまり信号  $s(t)$  の平均パワーに等しく,

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} df P(f)e^0 = \int_{-\infty}^{\infty} df P(f) \tag{A.15}$$

であることを踏まえて,  $P(f)$  をパワースペクトル密度と呼ぶ。また, 全領域での積分が平均パワーに等しいという条件のもとで, 正の周波数でのみ定義した片側パワースペクトル密度

$$P^{\text{single}}(f) = \begin{cases} 2P(f) & (f \geq 0), \\ 0 & (f < 0), \end{cases} \tag{A.16}$$

もよく用いられる。 $P(f) = P^{\text{single}}(|f|)/2$  である。これ以降では片側パワースペクトル密度を前提として, 上付きの single の文字は省略する。

ここで,  $\langle \tilde{s}^*(f')\tilde{s}(f) \rangle$  について調べてみると,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{s}^*(f')\tilde{s}(f) \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt s(t')e^{i2\pi f't'} s(t)e^{-i2\pi ft} \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle s(t')s(t) \rangle e^{i2\pi f't'} e^{-i2\pi ft} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt R(t-t')e^{i2\pi f't'} e^{-i2\pi ft} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau)e^{i2\pi f't'} e^{-i2\pi f(\tau+t')} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i2\pi(f-f')t'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau R(\tau)e^{-i2\pi f\tau} \\
&= \frac{1}{2} \delta(f-f')P(|f|) \tag{A.17}
\end{aligned}$$

という関係が得られる。この関係式もしばしば用いられる。

前節の内容をもとに、 $s(t)$  のパワースペクトル密度  $P(f)$  と標本信号  $s_n = s(n\Delta t)$  ( $n = 0, \dots, N-1$ ) の離散 Fourier 変換  $\tilde{s}_k$  との関係を考える。 $s(t)$  の定義される区間が  $[0, T)$  であるとし、周波数成分は  $k\Delta f$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ) を考えることとすると、パワースペクトル密度の定義 (A.14) より、

$$\begin{aligned} P(k\Delta f) &= \frac{2}{T} |\tilde{s}(k\Delta f)|^2 \\ &= 2\Delta f |\tilde{s}_k \Delta t|^2 \\ &= 2|\tilde{s}_k|^2 \Delta t^2 \Delta f \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

とすればよい。また、離散自己相関関数  $R_m$  を

$$R_m = \langle s_n s_{n+m} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n s_{n+m} \quad (\text{A.19})$$

とする (ただし、 $l \geq N$  については  $s_l = 0$  として計算する)。このとき、

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n s_{n+m} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}_j \tilde{s}_k e^{i2\pi jn/N} e^{i2\pi k(n+m)/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}_j \tilde{s}_k e^{i2\pi km/N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j+k)n/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}_j \tilde{s}_k e^{i2\pi km/N} \delta_{j,-k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{s}_k|^2 e^{i2\pi km/N} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

となるので、 $P_k = |\tilde{s}_k|^2$  とすれば、 $R_m$  と  $P_k$  は離散 Fourier 変換対となる。 $P_k$  と  $P(k\Delta f)$  の間には

$$P_k = \frac{1}{2\Delta t^2 \Delta f} P(k\Delta f) \quad (\text{A.21})$$

という関係がある。そして、式 (A.17) のような関係式を  $\tilde{s}_n$  について考えてみると、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{s}_j^* \tilde{s}_k \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} s_n e^{i2\pi jn/N} s_m e^{-i2\pi km/N} \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \langle s_n s_m \rangle e^{i2\pi jn/N} e^{-i2\pi km/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} R_{m-n} e^{i2\pi jn/N} e^{-i2\pi km/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j-k)n/N} \sum_{m=0}^{N-1} R_l e^{-i2\pi kl/N} \\ &= \frac{1}{2\Delta t^2 \Delta f} \delta_{j,k} P(k\Delta f) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

が得られる。

### A.3 有色ガウスノイズの生成

周波数依存性の無いノイズを白色ノイズというのに対し、周波数依存性のあるノイズのことを有色ノイズという。あるガウスノイズ信号  $n(t)$  について、そのパワースペクトル密度を  $S_n(f)$ 、標本信号を  $n_m$ 、標本信号の離散 Fourier 変換を  $\tilde{n}_k$  とすると、式 (A.22) より、

$$\langle |\tilde{n}_k|^2 \rangle = \frac{1}{2\Delta t^2 \Delta f} S_n(k\Delta f) = \frac{T}{2} S_n(k\Delta f) \quad (\text{A.23})$$

であることがわかる。すなわち、

$$\langle \text{Re}[\tilde{n}_k]^2 \rangle + \langle \text{Im}[\tilde{n}_k]^2 \rangle = \frac{1}{2\Delta t^2 \Delta f} S_n(k\Delta f) \quad (\text{A.24})$$

であり、Fourier 変換の実部と虚部はそれぞれ元の信号における偶関数成分と奇関数成分に対応しているため、ノイズにおいては独立としてよいとして、

$$\langle \text{Re}[\tilde{n}_k]^2 \rangle = \langle \text{Im}[\tilde{n}_k]^2 \rangle = \frac{1}{4\Delta t^2 \Delta f} S_n(k\Delta f) \quad (\text{A.25})$$

が得られる。したがって、 $k = 0, \dots, N-1$  について  $\tilde{n}_k^R, \tilde{n}_k^I$  をそれぞれ独立に分散が式 (A.25) で表されるガウス分布にしたがった乱数で生成し、 $\tilde{n}_k = \tilde{n}_k^R + i\tilde{n}_k^I$  を逆離散 Fourier 変換することで、パワースペクトル密度が  $S_n(f)$  の有色ガウスノイズの標本信号  $n_m$  が得られる。

図 36, 37 に Advanced LIGO の感度曲線に基づいてガウスノイズを生成した際のスペクトルと時系列波形を示す。白色ノイズと違い、周波数依存性を持っていることがわかる。

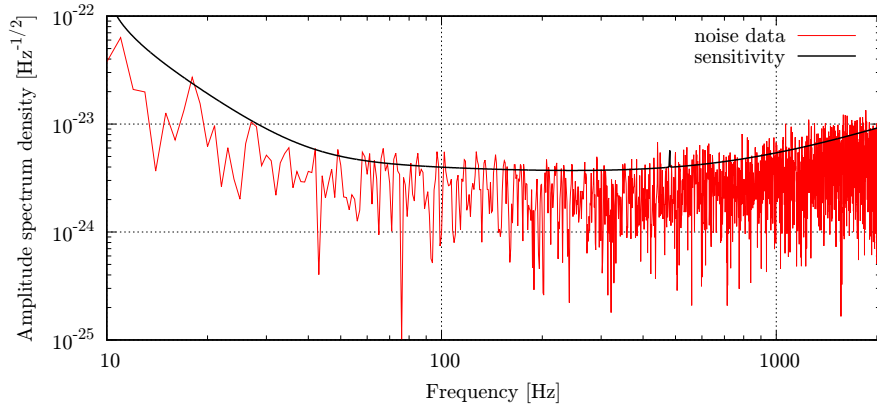


図 36: Advanced LIGO の感度曲線（黒線）に基づいて生成したガウスノイズのスペクトル（赤線）

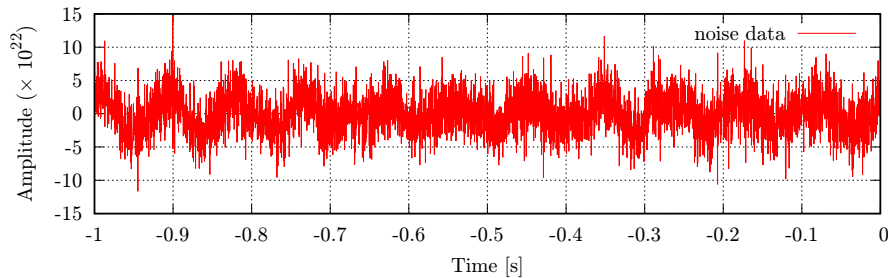


図 37: Advanced LIGO の感度曲線に基づいて生成したガウスノイズの時系列データ



## 付録 B ピアソン分布族による PDF 推定プログラム

5.3 節で述べたように、ピアソン分布族を仮定すると、分布の平均、分散、歪度、尖度を指定することで確率密度関数の閉じた式を得ることができる。Type I, IV, VI についての確率密度関数の式  $p_1(x)$ ,  $p_4(x)$ ,  $p_6(x)$  はそれぞれ

$$p_1(x) = \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}{(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2 + 1} B(m_1 + 1, m_2 + 1)} \left(1 + \frac{x + a}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x + a}{a_2}\right)^{m_2}, \quad (\text{B.1})$$

$$p_4(x) = k_4 \left\{1 + \left(\frac{x - \lambda_0}{\lambda_1}\right)^2\right\}^{-m} \exp\left\{-v \arctan\left(\frac{x - \lambda_0}{\lambda_1}\right)\right\}, \quad (\text{B.2})$$

$$k_4 = \frac{2^{2m-2} \Gamma(m + iv/2) \Gamma(m - iv/2)}{\pi \lambda_1 \Gamma(2m - 1)}, \quad (\text{B.3})$$

$$p_6(y) = \frac{1}{\beta B(\chi_1 + 1, \chi_2 - \chi_1 - 1)} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\chi_1} \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{-\chi_2} \quad (\text{B.4})$$

であった（各係数の定義は 5.3 節を参照）。正規分布からあまり遠くない場合には  $p_1(x)$  の式中の  $m_1$  などの指数部にあたる係数の値が大きくなり、単純にこのまま計算しようとするとうーフローを起こしてしまう。この問題を避けるためには各項をまず対数に落とし込んでから計算し、最後に指数関数にその値を入れて計算する方法がある。そのような考え方のもとで、統計量からピアソン分布族による確率密度関数を得るための C 言語によるプログラムを作成した。そのソースを Listing 1 に示す。このプログラムは実観測データに対して用いることを前提としており、分散や歪度がちょうど 0 になるような特殊な場合は考慮していないことに注意が必要である。

Listing 1: ピアソン分布族による PDF 推定プログラ

ラム

```

1 #include <unistd.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4 #include <gsl/gsl_math.h>
5 #include <gsl/gsl_sf_gamma.h>
6
7 double type1(double x, double param[7])
8 {
9     double a1, a2, m1, m2, x0, k, z, lnf, f;
10
11     a1 = param[1];
12     a2 = param[2];
13     m1 = param[3];
14     m2 = param[4];
15     x0 = param[5];
16     k = param[6];
17     z = x - x0;
18     if(( z < -a1 ) || ( z > a2 )){
19         return 0;
20     }
21
22     lnf = k;
23     lnf += m2*log(1 - z/a2);
24     lnf += m1*log(1 + z/a1);
25     f = exp(lnf);
26     return f;
27 }
28
29 double type4(double x, double param[7])
30 {
31     double alpha, m, v, x0, k, z, lnf, f;
32
33     alpha = param[1];
34     m = param[2];
35     v = param[3];
36     x0 = param[5];
37     k = param[6];
38     z = x - x0;
39
40     lnf = k;
41     lnf -= m*log(1 + z*z/(alpha*alpha));
42     lnf -= v*atan(z/alpha);
43     f = exp(lnf);
44     return f;
45 }
46
47 double type6(double x, double param[7])
48 {
49     double beta, gamma1, gamma2, x0, z, k;
50     double lnf, f;
51
52     gamma1 = param[1];
53     gamma2 = param[2];
54     beta = param[3];
55     x0 = param[5];
56     k = param[6];
57
58     if( gamma1 >= 0 ){
59         z = (x - x0)/beta;
60     } else {
61         double tmp;
62         tmp = gamma1;
63         gamma1 = -gamma2;
64         gamma2 = -tmp;
65
66         z = (x0 - x)/beta;
67     }
68
69     if( z <= 0 ){
70         return 0;
71     }
72
73     lnf = k;
74     lnf -= gamma1*log(1 + z);
75     lnf += gamma2*log(z);
76     f = exp(lnf);
77     return f;
78 }
79
80 double type1_lnnorm(double a1, double a2,
81     double m1, double m2)
82 {
83     double lnk;
84
85     lnk = 0.0;
86     lnk += m1*log(a1);
87     lnk += m2*log(a2);
88     lnk -= (m1 + m2 + 1)*log(a1 + a2);
89     lnk += gsl_sf_lngamma(m1 + m2 + 2);
90     lnk -= gsl_sf_lngamma(m1 + 1);
91     lnk -= gsl_sf_lngamma(m2 + 1);
92
93     return lnk;
94 }
95
96 double type6_lnnorm(double beta, double
97     gamma1, double gamma2)
98 {
99     if( gamma1 < 0 ){
100         double tmp;
101         tmp = gamma1;
102         gamma1 = -gamma2;
103         gamma2 = -tmp;
104     }
105
106     lnk = -log(beta);
107     lnk += gsl_sf_lngamma(gamma1);
108     lnk -= gsl_sf_lngamma(gamma2+1);
109     lnk -= gsl_sf_lngamma(gamma1-gamma2-1);
110
111     return lnk;
112 }
113
114 double lngammar2(double x, double y)
115 {
116     double y2, xmin;
117     y2 = y*y;
118     xmin = (2*y2 > 10.0)? 2*y2: 10.0;
119
120     long double r = 1;
121     long double s = 1, p = 1, f = 0;
122     while( p > s*DBL_EPSILON ){
123         p *= (y2 + f*f)/x;
124         p *= 1.0/(f + 1);
125         s += p;
126         x++;
127         f++;
128     }
129
130     long double lngammar;
131     lngammar = log(1.0/(r*s));
132
133     return (double)lngammar;
134 }
135

```

```

136 double type4_lnorm(double m, double v,
137     double a)
138 {
139     double lnk;
140     if( m <= 0.5 ){
141         return 0;
142     }
143     if( a <= 0 ){
144         a = -a;
145         v = -v;
146     }
147 }
148 lnk = log(1.0/M_SQRTPI);
149 lnk += lngammar2(m, 0.5*v);
150 lnk += gsl_sf_lngamma(m);
151 lnk -= gsl_sf_lngamma(m - 0.5);
152 lnk -= log(a);
153 return lnk;
154 }
155 void CalcParam(double mean, double variance,
156     double skewness, double kurtosis,
157     double param[7])
158 {
159     double sigma, beta1, beta2, B;
160     double a, b0, b1, b2, K, D;
161     sigma = sqrt(variance);
162     beta1 = skewness*skewness;
163     beta2 = kurtosis + 3;
164     B = 10*beta2 - 12*beta1 - 18;
165     b0 = -(4*beta2 - 3*beta1)/B*variance;
166     b1 = -sigma*skewness*(beta2 + 3)/B;
167     b2 = -(2*beta2 - 3*beta1 - 6)/B;
168     a = -b1;
169     K = b1*b1/(4*b0*b2);
170     D = b1*b1 - 4*b0*b2;
171     param[0] = K;
172     if( K < 0 ){ /* I */
173         double alpha1, alpha2, A1, A2;
174         double a1, a2, m1, m2, x0;
175         alpha1 = (-b1 + sqrt(D))/(2*b2);
176         alpha2 = (-b1 - sqrt(D))/(2*b2);
177         if( alpha1 < 0 ){
178             A1 = -alpha1;
179             A2 = alpha2;
180         } else {
181             A1 = -alpha2;
182             A2 = alpha1;
183         }
184         a1 = A1 - a;
185         a2 = A2 + a;
186         m1 = a1/(b2*(A1 + A2));
187         m2 = a2/(b2*(A1 + A2));
188         x0 = mean - a;
189         param[1] = a1;
190         param[2] = a2;
191         param[3] = m1;
192         param[4] = m2;
193         param[5] = x0;
194         param[6] = type1_lnorm(a1, a2, m1, m2);
195     }
196 }
203 else if (( 0 < K )&&( K < 1 )) { /* IV */
204     double lambda0, lambda1, A, c, alpha,
205         m, v;
206     lambda0 = -b1/(2*b2);
207     lambda1 = sqrt(-D)/(2*b2);
208     A = lambda1;
209     c = a + lambda0;
210     alpha = (A > 0)? A: -A;
211     m = -1/(2*b2);
212     v = -c/(alpha*b2);
213     param[1] = alpha;
214     param[2] = m;
215     param[3] = v;
216     param[4] = 0;
217     param[5] = mean + lambda0;
218     param[6] = type4_lnorm(m, v, alpha);
219 }
220 else { /* VI */
221     double a1, a2, A1, A2, beta, gamma1,
222         gamma2, alpha1, alpha2, x0;
223     a1 = (-b1 + sqrt(D))/(2*b2);
224     a2 = (-b1 - sqrt(D))/(2*b2);
225     if( a2 > a1 ){
226         A2 = a2;
227         A1 = a1;
228     } else {
229         A2 = a1;
230         A1 = a2;
231     }
232     beta = A2 - A1;
233     gamma1 = (a + A1)/(b2*beta);
234     gamma2 = (a + A2)/(b2*beta);
235     if( gamma1 >= 0 ){
236         alpha1 = gamma2 + 1;
237         alpha2 = gamma1 - gamma2 - 1;
238         x0 = mean + A2;
239     } else {
240         alpha1 = -gamma1 + 1;
241         alpha2 = gamma1 - gamma2 - 1;
242         x0 = mean + A1;
243     }
244     param[1] = gamma1;
245     param[2] = gamma2;
246     param[3] = beta;
247     param[5] = x0;
248     param[6] = type6_lnorm(beta, gamma1,
249         gamma2);
250 }
251 }
252 double pearson(double param[7], double x)
253 {
254     double p;
255     if( param[0] < 0 ){
256         p = type1(x, param);
257     } else if (( 0 < param[0] )&&( param[0]
258         < 1 )){
259         p = type4(x, param);
260     } else {
261         p = type6(x, param);
262     }
263     return p;
264 }

```

## 付録 C 重力波の赤方偏移と光度距離

光と同様に、重力波も伝播中に宇宙膨張の影響で波長が長くなる。これを赤方偏移という。赤方偏移の大きさは赤方偏移パラメータ  $z$  で指定され、種々の宇宙定数を指定すれば  $z$  から重力波が伝播してきた距離（光度距離という）が計算できる。本章では、宇宙膨張の理論について簡単に紹介し、重力波源の赤方偏移パラメータを与えたときに、観測される波形に変換する方法について論じる。

### C.1 宇宙論的距離

宇宙のモデルとして、大局的には一様かつ等方であり、十分大きなスケールで平均した場合には物質分布が並進対称性と回転対称性を持つというモデルを考える。これを一様等方宇宙モデルという。  $c = G = 1$  として、このモデルにおける線素  $ds^2$  は

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{1}{1 + Kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (\text{C.1})$$

と書くことができる。この計量を Friedmann–Robertson–Walker 計量という。  $a(t)$  はスケール因子と呼ばれ、宇宙の長さの拡大縮小率の時間変化を表す。  $K$  は宇宙の空間曲率係数である。動経座標  $\chi(r)$  を

$$\chi(r) := \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 + Kr^2}} dr \quad (\text{C.2})$$

と定義すると、

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1 + Kr^2}} \iff d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 + Kr^2}} dr \quad (\text{C.3})$$

なので、線素は

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (d\chi^2 + r_C(\chi)^2 d\theta^2 + r_C(\chi)^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{C.4})$$

と書き換えられる。  $r_C$  は共動距離と呼ばれる。

現在から時間  $t$  だけ過去に発射された光が  $d\theta = d\varphi = 0$  の軌跡を辿って座標原点に届いたとすると、その軌跡は  $ds^2 = 0$  であるので、

$$0 = -dt^2 + a(t)^2 d\chi^2 \iff \frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{a(t)} \iff \chi = \int_t^0 \frac{1}{a(t)} dt \quad (\text{C.5})$$

となる。例えば、時間  $t$  だけ過去に放射された波長  $\lambda$  の光を距離  $R$  離れた地点で時刻 0 に観測したときの波長が  $\lambda'$  だったとすると、光の波の 1 つ目の頂点について考えれば、

$$\chi = \int_t^0 \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 + Kr^2}} dr \quad (\text{C.6})$$

である。また、次の頂点については時刻  $\lambda/c$  だけ遅れてくるから、

$$\chi = \int_{t+\lambda/c}^{\lambda'/c} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 + Kr^2}} dr \quad (\text{C.7})$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
0 &= \int_t^0 \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t+\lambda/c}^{\lambda'/c} \frac{1}{a(t)} dt \\
&= \int_t^{t+\lambda/c} \frac{1}{a(t)} dt + \int_{t+\lambda/c}^0 \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t+\lambda/c}^{\lambda'/c} \frac{1}{a(t)} dt \\
&= \int_t^{t+\lambda/c} \frac{1}{a(t)} dt - \int_0^{\lambda'/c} \frac{1}{a(t)} dt
\end{aligned} \tag{C.8}$$

となる。波長 1 個分の時間内では  $a(t)$  は定数とすると

$$0 = \frac{\lambda}{a(t)c} - \frac{\lambda'}{a(0)c} \iff \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{a(0)}{a(t)} \tag{C.9}$$

が得られる。すなわち、観測時の光の波長と放射されたときの光の波長との比は、観測時のスケール因子と放射時のスケール因子の比に等しいということである。Hubble によって宇宙は膨張していることが確かめられているため、現在のスケール因子  $a_0$  は過去の  $a(t)$  よりも大きい。したがって、観測時の波長は放射時の波長よりも長くなる。これを (宇宙論的) 赤方偏移という。光速で伝播する波、という仮定での帰結なのでこの議論は重力波にも当てはまる。赤方偏移の大きさを表すパラメータ  $z$  は次のように定義される。

$$z := \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{a(0)}{a(t)} - 1. \tag{C.10}$$

$a(t)$  の振る舞いを調べるために、式 (C.1) で表される計量について宇宙定数を含んだアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{C.11}$$

を考える。一様等方宇宙モデルにおいては、エネルギー運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  を

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \tag{C.12}$$

という、エネルギー密度  $\rho$ 、圧力  $p$  の完全流体の式で与える。 $u_\mu$  は四元速度と呼ばれる量である。アインシュタイン方程式にこれを入れると、

$$\left( \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{K}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{C.13}$$

という方程式が得られる。これは Friedmann 方程式と呼ばれる。ここで、

$$H(t) := \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} \tag{C.14}$$

と定義されるハッブル定数を導入する。また、現時刻  $t = 0$  でのスケール因子  $a_0$ 、ハッブル定数  $H_0$ 、物質密度  $\rho_0$  を用いて、

$$\Omega_0 := \frac{8\pi}{3H_0^2}\rho_0, \quad \lambda_0 := \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{C.15}$$

として、現時刻での Friedmann 方程式を考えると、

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_0 - \frac{K}{a_0^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}
\iff K &= \frac{8\pi}{3}\rho_0 a_0^2 + \frac{\Lambda}{3} a_0^2 + H_0^2 a_0^2 \\
&= a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 + \lambda_0 - 1)
\end{aligned} \tag{C.17}$$

となる。さらに  $R(t) = a(t)/a_0$  とし、宇宙が十分膨張した後で圧力が無視できるとして  $\rho(t) \propto 1/a(t)^3$  とすると、Friedmann 方程式 (C.13) は、

$$\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_0}{R(t)} + 1 - \Omega_0 - \lambda_0 + \lambda_0 R(t)^2\right) \quad (\text{C.18})$$

と整理できる。宇宙論パラメータ  $H_0, \Omega_0, \lambda_0$  を与えれば  $R(t)$  の時間発展、つまり宇宙膨張の発展がわかる。また、

$$R(t) = \frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z} \iff \frac{dR(t)}{dt} = -\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt} \quad (\text{C.19})$$

であるから、

$$\left(\frac{1}{(1+z)^2} \frac{dz}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left(\Omega_0(1+z) + 1 - \Omega_0 - \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{(1+z)^2}\right), \quad (\text{C.20})$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H_0^2(1+z)^2 (\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0), \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{dz}{dt} = -H_0(1+z) \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}, \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_0(1+z) \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}} \quad (\text{C.23})$$

が得られる。

赤方偏移が  $z$  となる共動距離  $r_C(z)$  について、

$$\chi(z) = \int_0^{r_C(z)} \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr \quad (\text{C.24})$$

が言える。 $K = 0$  であれば  $\chi(z) = r_C(z)$  である。さらに、

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_{t(z)}^0 \frac{1}{a(t)} dt \\ &= \int_z^0 \frac{1}{a(z)} \frac{dt}{dz} dz \\ &= \int_0^z \frac{1}{H_0(1+z)a(z) \sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}} dz \\ &= \frac{1}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + (1 - \Omega_0 - \lambda_0)(1+z)^2 + \lambda_0}} dz \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

であるから、 $K = 0$  であれば、

$$r_C(z) = \chi(z) = \frac{1}{H_0 a_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_0(1+z)^3 + \lambda_0}} \quad (\text{C.26})$$

である。

絶対光度 (単位時間あたりのエネルギー放射率)  $L$  で発光する天体の光度距離  $d_L$  は次式で定義される。

$$I = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (\text{C.27})$$

$I$  は観測される flux である。光源において時間  $\delta t$  の間に放射された光について、観測者が受け取るエネルギーを考える。まず光は等方的に進むので、共動距離  $r_C(z)$  まで進んだ 1 点で受け取るエネルギーは全体

の  $1/(4\pi r_C(z)^2)$  である。赤方偏移によって、光を受け取るのに要する時間は  $(1+z)\delta t$  になっている。また、光は赤方偏移によって波長が  $(1+z)$  倍されており、光子の持つエネルギーは波長に反比例するので、受け取るエネルギーも  $1/(1+z)$  倍になっている。これらより、

$$I = \frac{L\delta t}{4\pi r_C(z)^2 \times (1+z)\delta t} \times \frac{1}{(1+z)} = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 r_C(z)^2} \quad (\text{C.28})$$

である。したがって、光度距離と共動距離の間には

$$d_L = (1+z)r_C(z) \quad (\text{C.29})$$

の関係がある。光度距離を使うことによって、膨張する宇宙を静止ユークリッド空間かのように距離を扱うことができる。

以上をまとめると、赤方偏移  $z$  の天体の光度距離  $d_L(z)$  は、空間曲率  $K=0$  とすると、

$$d_L = \frac{(1+z)c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (\text{C.30})$$

を計算すればよい。ここで、 $\Omega_m = \Omega_0 a_0^2$  は全物質密度パラメータ、 $\Omega_\Lambda = \lambda_0 a_0^2$  は暗黒エネルギー密度パラメータである。Planck プロジェクトの 2016 年の論文 [70] によると

$$H_0 = 67.9 \text{ km/s/Mpc}, \quad \Omega_m = 0.308, \quad \Omega_\Lambda = 0.692 \quad (\text{C.31})$$

となっている。

## C.2 数値相対論によるシミュレーション波形から観測データの生成

SXS [62] の提供している数値相対論による重力波のシミュレーション波形には 3 つのデータ  $x_1, x_2, x_3$  があり、それぞれ

$$x_1 = t/M, \quad x_2 = h_+(t)r/M, \quad x_3 = h_\times(t)r/M \quad (\text{C.32})$$

の値が格納されている。この重力波源を赤方偏移  $z$  のところに置いたときに、検出器で得られる波形を作るには

$$t = \frac{GM(1+z)}{c^3} x_1, \quad h_+(t) = \frac{GM(1+z)}{d_L(z)c^2} x_2, \quad h_\times(t) = \frac{GM(1+z)}{d_L(z)c^2} x_3 \quad (\text{C.33})$$

とすればよい。

## 参考文献

- [1] B. P. Abbott, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 061102, Feb 2016.
- [2] B. P. Abbott, et al. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 241103, Jun 2016.
- [3] B. P. Abbott, et al. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 118, p. 221101, Jun 2017.
- [4] B. P. Abbott, et al. GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 141101, Oct 2017.
- [5] B. P. Abbott, et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 119, p. 161101, Oct 2017.
- [6] F Acernese, et al. Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 32, No. 2, p. 024001, 2015.
- [7] T Akutsu, et al. Construction of KAGRA: an underground gravitational-wave observatory. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2018, No. 1, p. 013F01, 2018.
- [8] B. P. Abbott, et al. Tests of General Relativity with GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 221101, May 2016.
- [9] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健. 重力波をとらえる. 京都大学学術出版会, 1998.
- [10] <https://dcc.ligo.org/cgi-bin/DocDB/ShowDocument?docid=2974>.
- [11] Christian Röver, Renate Meyer, and Nelson Christensen. Bayesian inference on compact binary inspiral gravitational radiation signals in interferometric data. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 23, No. 15, p. 4895, 2006.
- [12] Marc van der Sluys, Vivien Raymond, Ilya Mandel, Christian Röver, Nelson Christensen, Vicky Kalogera, Renate Meyer, and Alberto Vecchio. Parameter estimation of spinning binary inspirals using Markov chain Monte Carlo. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 25, No. 18, p. 184011, 2008.
- [13] J. Veitch and A. Vecchio. Bayesian coherent analysis of in-spiral gravitational wave signals with a detector network. *Phys. Rev. D*, Vol. 81, p. 062003, Mar 2010.
- [14] Jordan B. Camp, John K. Cannizzo, and Kenji Numata. Application of the Hilbert-Huang transform to the search for gravitational waves. *Phys. Rev. D*, Vol. 75, p. 061101, Mar 2007.
- [15] Alexander Stroeer, John K. Cannizzo, Jordan B. Camp, and Nicolas Gagarin. Methods for detection and characterization of signals in noisy data with the Hilbert-Huang transform. *Phys. Rev. D*, Vol. 79, p. 124022, Jun 2009.
- [16] Hirotaka Takahashi, Kenichi Oohara, Masato Kaneyama, Yuta Hiranuma, and Jordan B Camp. On Investigating EMD Parameters to Search for Gravitational Waves. *Adv. Adapt. Data Anal.*, Vol. 5, No. 2, p. 1350010, 2013.
- [17] Masato Kaneyama, Kenichi Oohara, Hirotaka Takahashi, Yuichiro Sekiguchi, Hideyuki Tagoshi, and Masaru Shibata. Analysis of gravitational waves from binary neutron star merger by Hilbert-Huang transform. *Phys. Rev. D*, Vol. 93, p. 123010, Jun 2016.



- [18] Kazuki Sakai, Kenichi Oohara, Masato Kaneyama, and Hirotaka Takahashi. Analysis of the Real Gravitational Wave Data GW150914 with the Hilbert-Huang Transform. *ICIC Express Letters*, Vol. 11, pp. 45–51, January 2017.
- [19] Norden E. Huang, Zheng Shen, Steven R. Long, Manli C. Wu, Hsing H. Shih, Quanan Zheng, Nai-Chyuan Yen, Chi Chao Tung, and Henry H. Liu. The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 454, No. 1971, pp. 903–995, 1998.
- [20] Leon Cohen, 吉川昭 (翻訳), 佐藤俊輔 (翻訳). 時間-周波数解析. 朝倉書店, 1998.
- [21] Norden Eh Huang. *Hilbert-Huang transform and its applications*, Vol. 16. World Scientific, 2014.
- [22] Marcus Dätig and Torsten Schlurmann. Performance and limitations of the HilbertHuang transformation (HHT) with an application to irregular water waves. *Ocean Engineering*, Vol. 31, No. 1415, pp. 1783 – 1834, 2004.
- [23] G. Rilling and P. Flandrin. One or Two Frequencies? The Empirical Mode Decomposition Answers. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 56, No. 1, pp. 85–95, Jan 2008.
- [24] Jiarong Yeh, Jiannshing Shieh, and Norden E. Huang. Complementary Ensemble Empirical Mode Decomposition: A Novel Noise Enhanced Data Analysis Method. *Advances in Adaptive Data Analysis*, Vol. 02, No. 02, pp. 135–156, 2010.
- [25] Zhaohua Wu and Norden E. Huang. ENSEMBLE EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION: A NOISE-ASSISTED DATA ANALYSIS METHOD. *Advances in Adaptive Data Analysis*, Vol. 01, No. 01, pp. 1–41, 2009.
- [26] S. Meignen and V. Perrier. A New Formulation for Empirical Mode Decomposition Based on Constrained Optimization. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 14, No. 12, pp. 932–935, Dec 2007.
- [27] H. Hong, X. Wang, and Z. Tao. Local Integral Mean-Based Sifting for Empirical Mode Decomposition. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 16, No. 10, pp. 841–844, Oct 2009.
- [28] Boqiang Huang and Angela Kunoth. An optimization based empirical mode decomposition scheme. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 240, pp. 174 – 183, 2013.
- [29] Marcelo A. Colominas, Gastn Schlotthauer, and Mara E. Torres. An unconstrained optimization approach to empirical mode decomposition. *Digital Signal Processing*, Vol. 40, pp. 164 – 175, 2015.
- [30] Marcelo A. Colominas, Gastn Schlotthauer, and Mara E. Torres. Improved complete ensemble EMD: A suitable tool for biomedical signal processing. *Biomedical Signal Processing and Control*, Vol. 14, pp. 19 – 29, 2014.
- [31] Zhaohua Wu and Norden E Huang. A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 460, pp. 1597–1611. The Royal Society, 2004.
- [32] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Goncalves. Empirical mode decomposition as a filter bank. *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, pp. 112–114, 2004.
- [33] Karl Pearson. Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 185,

- pp. 71–110, 1894.
- [34] Karl Pearson. Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Skew Variation in Homogeneous Material. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 186, pp. 343–414, 1895.
- [35] DG Ashworth, Robert Oven, and B Mundin. Representation of ion implantation profiles by Pearson frequency distribution curves. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 23, No. 7, p. 870, 1990.
- [36] Hong Nie and Shaohua Chen. Lognormal sum approximation with type IV Pearson distribution. *IEEE Communications Letters*, Vol. 11, No. 10, 2007.
- [37] N Roveri and A Carcaterra. Damage detection in structures under traveling loads by Hilbert–Huang transform. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 28, pp. 128–144, 2012.
- [38] Hui Li, Yuping Zhang, and Haiqi Zheng. Hilbert-Huang transform and marginal spectrum for detection and diagnosis of localized defects in roller bearings. *Journal of mechanical science and technology*, Vol. 23, No. 2, pp. 291–301, 2009.
- [39] Antonio Garcia Espinosa, Javier A Rosero, Jordi Cusido, Luis Romeral, and Juan Antonio Ortega. Fault detection by means of Hilbert–Huang transform of the stator current in a PMSM with demagnetization. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 25, No. 2, pp. 312–318, 2010.
- [40] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Andrei O Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 26, No. 16, p. 163001, 2009.
- [41] Takashi Nakamura, Kenichi Oohara, and Yasufumi Kojima. General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Vol. 90, pp. 1–218, 1987.
- [42] Kostas D Kokkotas and Bernd G Schmidt. Quasi-normal modes of stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, Vol. 2, No. 1, p. 2, 1999.
- [43] Werner Israel. Event Horizons in Static Vacuum Space-Times. *Phys. Rev.*, Vol. 164, pp. 1776–1779, Dec 1967.
- [44] B. Carter. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 26, pp. 331–333, Feb 1971.
- [45] S. W. Hawking. Black holes in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 25, No. 2, pp. 152–166, 1972.
- [46] D. C. Robinson. Uniqueness of the Kerr Black Hole. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 34, pp. 905–906, Apr 1975.
- [47] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a Schwarzschild Singularity. *Phys. Rev.*, Vol. 108, pp. 1063–1069, Nov 1957.
- [48] Frank J. Zerilli. Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics. *Phys. Rev. D*, Vol. 2, pp. 2141–2160, Nov 1970.
- [49] S. Chandrasekhar, S. and Detweiler. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 344, No. 1639, pp. 441–452, 1975.
- [50] An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 402, No. 1823,

- pp. 285–298, 1985.
- [51] Saul A. Teukolsky. Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 29, pp. 1114–1118, Oct 1972.
- [52] Ezra Newman and Roger Penrose. An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 3, No. 3, pp. 566–578, 1962.
- [53] S Detweiler. Black holes and gravitational waves. III-The resonant frequencies of rotating holes. *The Astrophysical Journal*, Vol. 239, pp. 292–295, 1980.
- [54] An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 402, No. 1823, pp. 285–298, 1985.
- [55] Fernando Echeverria. Gravitational-wave measurements of the mass and angular momentum of a black hole. *Phys. Rev. D*, Vol. 40, pp. 3194–3203, Nov 1989.
- [56] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Clifford M. Will. Gravitational-wave spectroscopy of massive black holes with the space interferometer LISA. *Phys. Rev. D*, Vol. 73, p. 064030, Mar 2006.
- [57] <http://www.phy.olemiss.edu/~Eberti/ringdown/>.
- [58] Olaf Dreyer, Bernard Kelly, Badri Krishnan, Lee Samuel Finn, David Garrison, and Ramon Lopez-Aleman. Black-hole spectroscopy: testing general relativity through gravitational-wave observations. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 21, No. 4, p. 787, 2004.
- [59] Frans Pretorius. Evolution of Binary Black-Hole Spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 95, p. 121101, Sep 2005.
- [60] Frans Pretorius. Simulation of binary black hole spacetimes with a harmonic evolution scheme. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 23, No. 16, p. S529, 2006.
- [61] Tony Chu, Heather Fong, Prayush Kumar, Harald P. Pfeiffer, Michael Boyle, Daniel A. Hemberger, Lawrence E. Kidder, Mark A. Scheel, and Bela Szilagyi. On the accuracy and precision of numerical waveforms: Effect of waveform extraction methodology. *Class. Quant. Grav.*, Vol. 33, No. 16, p. 165001, 2016.
- [62] <https://www.black-holes.org/waveforms/>.
- [63] K. Kuroda, et al. Large-Scale Cryogenic Gravitational Wave Telescope. *International Journal of Modern Physics D*, Vol. 08, pp. 557–579, 1999.
- [64] Yoichi Aso, Yuta Michimura, Kentaro Somiya, Masaki Ando, Osamu Miyakawa, Takanori Sekiguchi, Daisuke Tatsumi, and Hiroaki Yamamoto. Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector. *Phys. Rev. D*, Vol. 88, p. 043007, Aug 2013.
- [65] M Punturo, et al. The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory. *Classical and Quantum Gravity*, Vol. 27, No. 19, p. 194002, 2010.
- [66] Takashi Nakamura, Masaki Ando, Tomoya Kinugawa, Hiroyuki Nakano, Kazunari Eda, Shuichi Sato, Mitsuru Musha, Tomotada Akutsu, Takahiro Tanaka, Naoki Seto, Nobuyuki Kanda, and Yousuke Itoh. Pre-DECIGO can get the smoking gun to decide the astrophysical or cosmological origin of GW150914-like binary black holes. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2016, No. 9, p. 093E01, 2016.
- [67] Hiroyuki Nakano, Takahiro Tanaka, and Takashi Nakamura. Possible golden events for ringdown gravitational waves. *Phys. Rev. D*, Vol. 92, p. 064003, Sep 2015.

- [68] Tomoya Kinugawa, Hiroyuki Nakano, and Takashi Nakamura. Gravitational wave quasinormal mode from Population III massive black hole binaries in various models of population synthesis. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2016, No. 10, p. 103E01, 2016.
- [69] Tomoya Kinugawa, Kohei Inayoshi, Kenta Hotokezaka, Daisuke Nakauchi, and Takashi Nakamura. Possible indirect confirmation of the existence of Pop III massive stars by gravitational wave. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 442, No. 4, pp. 2963–2992, 2014.
- [70] PAR Ade, N Aghanim, M Arnaud, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, AJ Banday, RB Barreiro, JG Bartlett, N Bartolo, et al. Planck 2015 results-XIII. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 594, p. A13, 2016.
- [71] Zhongyang Zhang, Emanuele Berti, and Vitor Cardoso. Quasinormal ringing of Kerr black holes. II. Excitation by particles falling radially with arbitrary energy. *Phys. Rev. D*, Vol. 88, p. 044018, Aug 2013.
- [72] Bruce Allen, Warren G. Anderson, Patrick R. Brady, Duncan A. Brown, and Jolien D. E. Creighton. FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries. *Phys. Rev. D*, Vol. 85, p. 122006, Jun 2012.
- [73] LIGO Scientific Collaboration. LIGO Open Science Center release of GW150914, 2016.
- [74] B. P. Abbott, et al. Properties of the Binary Black Hole Merger GW150914. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 116, p. 241102, Jun 2016.
- [75] 須藤靖. 一般相対論入門. 日本評論社, 2005.
- [76] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, 若野省己 (訳) . 重力理論. 丸善出版, 2011.
- [77] Jolien D. E. Creighton and Warren G. Anderson. *Gravitational-Wave Physics and Astronomy: An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis*. WILEY, 2011.
- [78] Masaru Shibata. *Numerical Relativity*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA, 2015.
- [79] 久保拓弥. データ解析のための統計モデリング入門. 岩波書店, 2012.
- [80] Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall, 2009.