

FIR デジタルフィルタのリプル評価について

吉川 敏 則* ・ 手 島 雅 延*

On the Evaluation of Ripple in FIR Digital Filters

Toshinori YOSHIKAWA and Masanobu TESHIMA

The weighted Chebyshev method proposed by Rabiner, Mclellan and Parks is well known as a useful method for the design of linear phase FIR (Finite Impulse Response) digital filters. However, the filters designed with this method are not always the maximal ripple filters.

This paper presents an evaluation of FIR filters using the wave moments and how to find easily the maximal ripple filters.

Herrman and Schuessler proposed a method (HS method) to transform equiripple linear phase filters into an equiripple minimum phase filters with half the degree and the magnitude characteristic equal to the square root of the prototype. However, this method is limited by a numerical complexity. The HS method has been improved and used. But the filters are not always an equiripple in a passband.

In this paper, we define the equiripple scale (E_r) in a measure of the ripple. And we show the relation between E_r and linear phase FIR filters as prototypes in the design of minimum phase filters.

Key word: FIR digital filter/Maximal ripple filter/equiripple/minimum phase/wave moment

1. はじめに

直線位相 FIR デジタルフィルタの設計法として、よく知られている方法に Remez Exchange Algorithm があり、この方法を用いて設計した FIR フィルタは常に Maximal Ripple フィルタとなるとは限らない。

小文では、設計された FIR フィルタが Maximal Ripple フィルタであるかを判断するために、波形モーメントを用いた簡単な方法を示す。

また、最小位相 FIR デジタルフィルタの設計法として、Herrmann-Schuessler がチェビシェフの意味で最適振幅特性を得る理論上の方法を提案している (HS 法)²⁾。しかし、HS 法には数値解析上の問題点があり、現実には設計不可能である。そこで、HS 法を改良した設計法が用いられているが、周波数特性の通過域において等リプルとならないなどの問題を生じる。小文では、等リプルの尺度として等リプル性を定義し、最小位相フィルタを設計する際にその原型となる直線位相 FIR フィルタとの関係について論じる。

2. 波形モーメントの定義

波形モーメントは、波形の概要を表す尺度の一つとして用いることができる。離散時間信号を $h(i)$ とすると、以下のように定義される³⁾。

$$m_r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i^r h(i) / \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \quad (1)$$

$$\mu = m_1 \quad (2)$$

$$\mu_r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (i-\mu)^r h(i) / \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \quad (3)$$

ここで、

m_r : 原点回りの r 次モーメント

μ : 波形中心

μ_r : 波形中心回りの r 次モーメント

また、波形モーメントは次式のように周波数域において、フーリエ変換の周波数 $\omega = 0$ における微係数でも表現できる。

$$m_r = \frac{j^r}{H(0)} \frac{\partial^r H(\omega)}{\partial \omega^r} \Big|_{\omega=0} \quad (4)$$

$$\mu_r = \frac{j^r}{H(0)} \frac{\partial^r H(\omega) \cdot e^{j\omega\mu}}{\partial \omega^r} \Big|_{\omega=0} \quad (5)$$

原稿受付: 平成元年 3 月 14 日

*長岡技術科学大学電気系

上式の変形より、振幅特性を $A(\omega)$ とすると、 $r = 2$ の時、つまり波形中心回りの2次波形モーメント μ_2 は以下のように表される。

$$\mu_2 = -\frac{A''(0)}{A(0)} \quad (6)$$

上で述べた波形モーメントは周波数 $\omega = 0$ のみの微係数を含むが、 $\omega = 0$ 以外の周波数まで拡張すると、以下のように重みつきモーメント⁴⁾を定義できる。

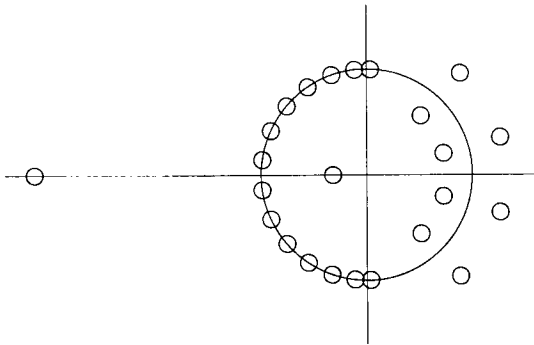
$$\tilde{\mu}_r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (i-\mu)^r h(i) \cdot e^{-j\omega_0(i-\mu)} \quad (7)$$

ここで、 ω_0 は $[0, \pi]$ のある特定の周波数

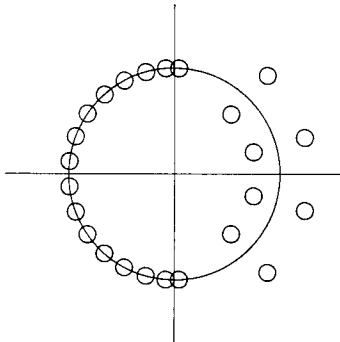
前述の波形モーメントは、ある周波数点のみの情報を表すが、 $-\pi$ から π までの周波数全体の情報を表す尺度として定義されたパワーモーメント⁵⁾がある。 r 次パワーモーメントは、次式で表される。

$$m_r^{(2)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i^r h^2(i) \quad (8)$$

ここで $h(i)$: 離散時間信号



(a) Non maximal ripple filter



(b) Maximal ripple filter

Fig. 1 Pole-zero pattern

これを周波数域で表すと

$$m_r^{(2)} = \frac{j^r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(-\omega) \frac{\partial^r H(\omega)}{\partial \omega^r} d\omega \quad (9)$$

ここで $H(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)e^{-j\omega i}$

また、パワー中心 $\mu^{(2)}$ は、

$$\mu^{(2)} = \frac{m_1^{(2)}}{m_0^{(2)}} \quad (10)$$

で定義される。

3. Maximal Ripple フィルタについて

Remez Exchange Algorithm で設計した FIR フィルタは、常に Maximal Ripple フィルタ⁶⁾となるとは限らない。ここで、Maximal Ripple フィルタとは、極値周波数が最大個数となる最適フィルタとして定義される。式(6)が振幅特性の周波数 $\omega = 0$ での2次微分に対応していることより、 μ_2 が極大となる場合に Maximal Ripple フィルタとなることが知られている⁷⁾。 μ_2 が極大となる場合以外は、零点配置において実軸上の単位円上以外に零点が存在する(図1)。つまり Maximal Ripple フィルタとはならない。この場合、阻止域の重みを大きくすると、通過域の零点が阻止域に移動しようとするが、 μ_2 が極大の状態では零点の移動が完了し、次の移動が始まる直前となる。

また、式(7)は式(5)と同様に周波数域で表すことができ、直線位相の場合は、 $\omega = \pi$ で式を変形すると以下のようなになる。

$$\tilde{\mu}_r = j^r \cdot \left. \frac{\partial^r A(\omega)}{\partial \omega^r} \right|_{\omega \rightarrow \pi} \quad (11)$$

低域直線位相 FIR フィルタの振幅特性は、次数 N が偶数の場合は $\omega = \pi$ に関して偶対称、 N が奇数の場合は奇対称になる。よって N が偶数の場合は $\omega = \pi$ での2次微分(式(11)で $r = 2$)が極大をとる時、また奇数の場合は1次微分(式(11)で $r = 1$)の極大で Maximal Ripple フィルタとなる。

フィルタ次数が $N = 50$ の場合の設計において、阻止域の重み (Stopband weight) を変えたときの μ_2 、 $\tilde{\mu}_2$ の変化を図2に示す。

4. 等リプル性の定義

与えられた周波数特性がどの程度等リプルであるかを判断するために、以下のように等リプル性を定義する。

図3に示すように、通過域の振幅特性で上に凸の

ピーク値を $p_i (i = 1 \sim n)$, 下に凸のピーク値を $q_i (i = 1 \sim m)$ とし, それぞれの平均値を p, q とする.

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}, \quad q = \frac{\sum_{i=1}^m q_i}{m} \quad (12)$$

また, d を次式で定義する.

$$d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - p)^2 + \sum_{i=1}^m (q_i - q)^2}{n + m} \quad (13)$$

リプル幅 D を次式で,

$$D = p - q \quad (14)$$

さらに, 等リプル性 Er を式(15)で定義する.

$$Er = \frac{d}{D} \times 100 \quad [\%] \quad (15)$$

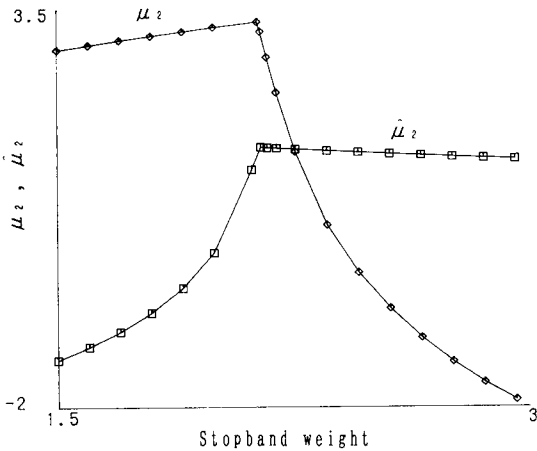


Fig. 2 Relation between stopband weight and $\mu_2, \hat{\mu}_2$.

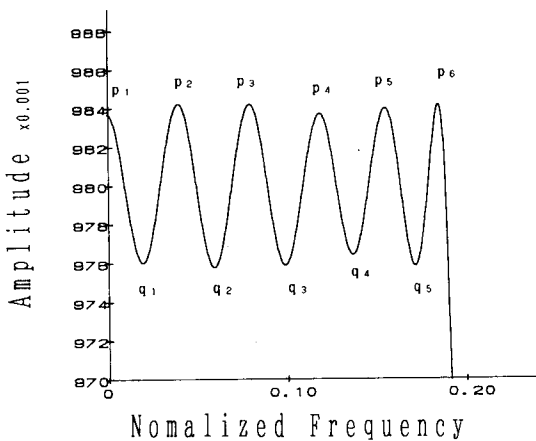


Fig. 3 Amplitude in passband

Remez Exchange Algorithm で設計した直線位相 FIR フィルタ (次数 $N = 50$) の通過域について, 等リプル性 Er を求めると次のようになる.

$$\text{grid density} = 16 \text{ の場合, } Er = 0.104 \quad [\%]$$

$$\text{grid density} = 99 \text{ の場合, } Er = 0.0051 \quad [\%]$$

この結果は, フィルタ設計を厳密に行う場合の grid density の重要性を示している.

5. 最小位相 FIR フィルタにおける等リプル性

最小位相 FIR フィルタの設計法である HS 法について, その概要を最初に述べる. まず直線位相 FIR デジタルフィルタを Remez Exchange Algorithm で設計する. その時の伝達関数を

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^N g_0(n) \cdot z^{-n} \\ = z^{-N/2} \cdot G_0^*(z) \quad (\text{次数 } N: \text{偶数}) \quad (16)$$

とし, 図 4(a) に示すように, その通過域リプルは Δ_1 , 阻止率リプルは Δ_2 とする.

$G_0^*(e^{j\omega T})$ の阻止域極小値 ($-\Delta_2$) を零に底上げする.

$$G^*(z) = G_0^*(z) + \delta, \quad \delta = \Delta_2 \quad (17)$$

この結果, $G_0^*(e^{j\omega T})$ の阻止域極小点は, 図 4(b) に示すように $G^*(e^{j\omega T})$ の二重零点となる. $G(z) = z^{-N/2} \cdot G^*(z)$ の零点は通過域近傍の単位円に関する鏡像零点と, 阻止域にある単位円上の 2 重零点とより成る (図 4(b)). ここで, $G(z)$ を次のように分解する.

$$G(z) = H(z) \cdot \hat{H}(z) \quad (18)$$

$H(z)$ には鏡像零点のうちの単位円内の零点と, 単位円上の各 2 重零点より 1 個ずつの零点を割り当てる. 残りの零点は $\hat{H}(z)$ に割り当てる. すなわち $\hat{H}(z)$ の零点の集合は, $H(z)$ の零点の逆数の集合である. 更に係数は次のように定める. $N/2 = M - 1$ とおき,

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} a(i) \cdot z^{-i} \\ = z^{-(M-1)} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} a(M-1-i) \cdot z^i \quad (19)$$

と表し, $\hat{H}(z)$ を

$$\hat{H}(z) = \sum_{i=0}^{M-1} a(M-1-i) \cdot z^i \quad (20)$$

とする. すなわち $\hat{H}(z)$ は $H(z)$ の整合フィルタであり, $H(z)$ のインパルス応答は, $\hat{H}(z)$ のインパルス応

答の時間軸を逆転したものとなる。このとき $|\hat{H}(e^{j\omega T})| = |H(e^{j\omega T})| = \sqrt{G^*(e^{j\omega T})}$ である。 $g(0) = a(0)a(M-1)$ であるが、零点が与えられているから $a(M-1)/a(0)$ は定まっており、結局 $a(0)$ が求まる。以上により $H(e^{j\omega T}) = e^{-j((M-1)/2)\omega T} \cdot H^*(e^{j\omega T})$ とおけば、 $H^*(e^{j\omega T}) = \sqrt{G^*(e^{j\omega T})}$ であるから、 $H^*(e^{j\omega T})$ の通過域平均値を 1 に正規化すると、図 4(c) に示すようになり、そのリップル δ_1, δ_2 と Δ_1, Δ_2 の関係は次式で与えられる。

$$\Delta_1 = \frac{4\delta_1}{2+2\delta_1^2-\delta_2^2} \tag{21}$$

$$\Delta_2 = \frac{\delta_2^2}{2+2\delta_1^2-\delta_2^2}$$

これより δ_1, δ_2 を与えて、 Δ_1, Δ_2 を求め、Remez exchange Algorithm により $G_0(z)$ を設計し、式(17), (18) より $H(z)$ を求めれば、周波数域での設計が完了することになる。

しかし、実際には $G(z)$ の設計が有限精度の数値計算で行われるから、数値誤差のために必ずしも $G_0(z)$ は単位円上に 2 重零点を持たない。そのために、この点が改良されて実用化されている。式(17)における δ を Δ_2 より 5~25% 程度大きくとることにより、阻止域を

すべて鏡像零点とし、数値解析上の問題点を除去して実用化した設計法⁹⁾をタイプ I, HS 法の理論を用いた複素ケプストラムによる設計法⁹⁾をタイプ II とする。

改良された 2 種類の HS 法について等リップル性の評価を行う。最小位相 FIR フィルタを設計 (伝達関数 $G_0(z)$ を設計) する際に、その原型となる直線位相 FIR フィルタの規格を以下のようにする。この時、Maximal Ripple フィルタとなる阻止域の重みは 2.143 となる。

(規格) 次数 $N = 50$
 Lowpass Filter
 passband 0.0-0.19
 stopband 0.24-0.5

阻止域の重みを変えて、タイプ I, タイプ II の等リップル性を求めると表 1 のようになる。つまり、直線位相 FIR フィルタが Maximal Ripple フィルタとなる近傍でもっとも等リップルであるといえる。

問題点① タイプ I は通過域において等リップルであるとはいえない。これは、設計する際に、振幅特性において阻止域の極小値を零に底上げする時の底上

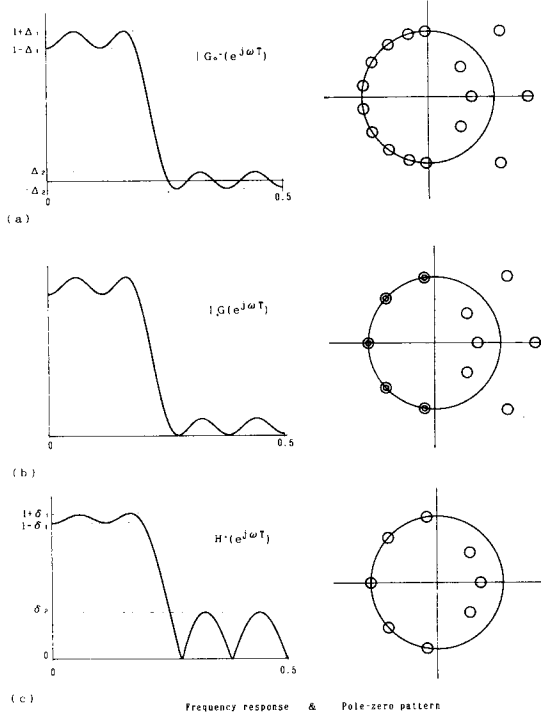


Fig. 4 Herrman-Schuessler method

Table 1 E_r of minimum phase filters

stopband weight	等リップル性 [%]			
	passband		stopband	
	タイプ I	タイプ II	タイプ I	タイプ II
2.12	1.28	0.032	1.085	0.0097
2.13	0.98	0.035	0.612	0.0097
2.14	0.70	0.080	0.137	0.099
* 2.143	0.63	0.028	0.034	0.0096
2.145	0.68	0.78	0.034	0.039
2.15	1.68	1.94	0.034	0.036
2.16	3.98	4.30	0.034	0.031

* Maximal Ripple

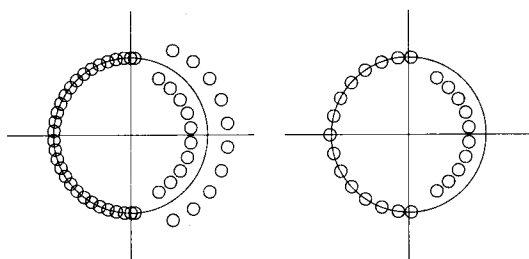


Fig. 5 Pole-zero pattern.

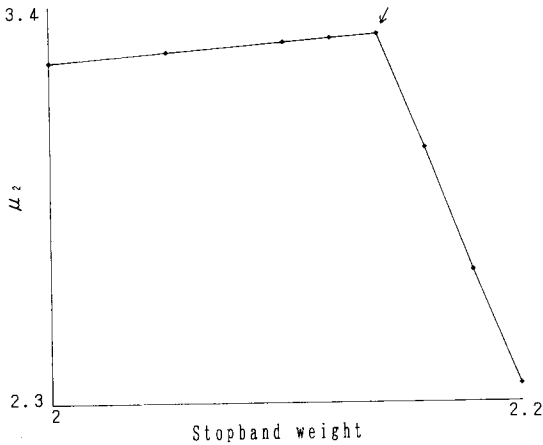


Fig. 6 Relation between stopband weight and μ_2

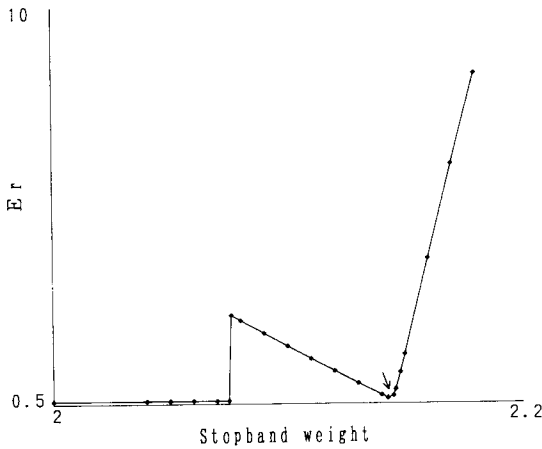


Fig. 7 Relation between stopband weight and E_r .

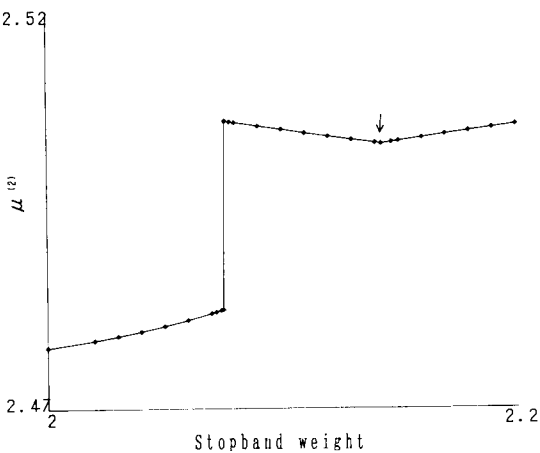


Fig. 8 Relation between stopband weight and $\mu^{(2)}$.

げ量を 5~25%程度大きくとる影響が表れているものと考えられる。

問題点② タイプ II では、図 5 に示すように、 $\omega = \pi/T$ において単位円外に零点が現れることがある。これは最小位相の条件を満たしていない。

3 節で述べたように、波形中心回りの 2 次波形モーメント μ_2 の極大で Maximal Ripple フィルタとなる。図 6 に μ_2 、図 7 に等リプル性 E_r 、図 8 にパワー中心 $\mu^{(2)}$ (式(10))を示す。各図での矢印は、Maximal Ripple フィルタとなる点を表している。これらの図から、それぞれには強い相関がみられる。

6. む す び

設計された直線位相 FIR デジタルフィルタが Maximal Ripple フィルタであるかを判断するために、波形モーメントを用いた簡単な方法を示した。また、等リプル性を定義し、最小位相 FIR フィルタ設計のための、改良された HS 法について評価を行い、直線位相フィルタが Maximal Ripple フィルタとなる近傍でもっとも等リプルとなることを示した。これらの結果は、実際のフィルタ設計での重要な指針となる。

文 献

- 1) J. H. McClellan, T.W. Parks and L.R. Rabiner: "A Computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters", IEEE AU-21, 6, pp. 506-525 (Dec. 1973).
- 2) O. Herrmann and H.W. Schuessler: "Design of non-recursive digital filters with minimum phase", Elec. Lett., 6, pp. 329-330 (May 1970).
- 3) 吉川, 村上, 中越: "インパルス応答と周波数特性の関係" CAS 80-1, pp. 1-8, (1980).
- 4) 吉川, 中越: "FIR デジタルフィルタにおける波形モーメントの係数感度" CAS 80-59, pp. 9-16, (1980).
- 5) 吉川, 木島: "パワーモーメントの定義と信号処理への適用" CAS 88-44, pp. 33-38, (1988).
- 6) L.R. Rabiner and B. Gold: "Theory and Application of Digital Signal Processing" pp. 130-136, Prentice-Hall (1975).
- 7) 吉川, 小西: "FIR デジタルフィルタの零点配置の簡単な評価方法について" 信学論(A), J69-A, 4, pp. 535-538 (1986).
- 8) 上田, 青山: "最小位相推移 FIR フィルタの設計法" 信学論(A), J62-A, 9, pp. 539-546 (1979).
- 9) G.R. Reddy: "Design of minimum-phase FIR digital filter through cepstrum" Elec. Lett., 22, pp. 1225-1227 (Nov. 1986).