

成層中の平面二次元密度噴流と軸対称密度噴流

福嶋 祐介*

PLANE AND AXISYMMETRIC FORCED PLUMES IN A STRATIFIED ENVIRONMENT

Yusuke FUKUSIMA

Plane and axisymmetric forced plumes in a stratified environment are investigated analytically. The linear density distribution in the ambient is assumed, including the uniform environment for the forced plume case and other special cases for the simple jet. The mathematical model used herein is the layer integral of basic equations of the continuity, the vertical momentum and the diffusion of scalar quantities. These are analysed numerically. The values of layer integrals constants are given by the $k-\epsilon$ turbulence model analysis (Fukushima, 1989). The characteristics of the both plane and axisymmetric forced plumes in a stratified environment are clarified for the flow development and the flow establishment regions.

Key words: jets/plumes/stratified environment/layer integral method.

1. 序 論

周囲流体と密度の異なる流体が鉛直方向に流出すると鉛直密度噴流（以下では単に密度噴流と呼ぶ）が形成される。このような密度噴流は、自然界で数多く観察され、また、工学的見地からも重要である¹⁾²⁾³⁾⁴⁾。また流入流体の密度が周囲流体の密度と等しい場合には、噴流と呼ばれる流れが形成される。このような密度噴流が存在する場合には、周囲流体も密度成層をなしている場合が多い。

密度噴流に関する研究は、周囲流体の密度が一様な場合に対して、数多くの研究がなされている。特に流れが鉛直二次元の密度噴流、軸対称の密度噴流では、数多くの解析的研究や実験的研究がある²⁾⁴⁾⁵⁾。また、平面二次元噴流、軸対称噴流についても様々な検討がなされている。Rouse et al⁶⁾は、軸対称の密度噴流の実験を行い、流速分布、密度分布について明らかにしている。一方、Kotosvinos⁶⁾⁷⁾は、平面二次元の密度噴流と噴流について詳細な実験的検討を行っている。これらに対して主たる解析法として層積分による解析が行

われてきた³⁾⁵⁾。このような密度流の層積分解析では、連行係数がどのような値をとるのかといった点に問題に集約されていると良い。また、層積分法によって連行係数を求める試みもなされている。この点に関して、小松、浦⁸⁾は、傾斜ブルームを対象として、層積分法により連行係数を求めている。

著者は⁹⁾¹⁰⁾、 $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いたとき、傾斜壁面密度噴流と二次元密度噴流、噴流が相似解を持つことを明らかにし、それぞれの流速分布、濃度分布を数値解析により求めている。また、この解析では連行係数も解析の結果として得られる。しかしながら、この種の解析は単純な流れの場に限定され、いま考えているような周囲流体が密度分布を持つ場合には適用されない。

以上のようにこのように周囲流体の密度が一様な場に流入する密度噴流については様々な検討がなされている。しかしながら、周囲流体の密度が一様ではなく、分布を持っている場合の密度噴流の特性は充分には明らかにされていない。これは、周囲流体が密度分布を持つ場合には、考慮すべきパラメーターが増え、解析が困難となるためと考えられる。したがって、このような流れを微分方程式のままでは解くことはきわめて困難であり、層積分法による解析が有効となる。

本研究の目的は、周囲流体が密度分布を持つ場合の密度噴流の特性を層積分の手法により明らかにすること

原稿受付：平成3年4月30日

*長岡技術科学大学建設系

とである。このため、解析手段として、平面二次元密度噴流と軸対称密度噴流を考える。これらの特殊な場合として、一様密度の流体中の密度噴流及び、より単純な噴流を総括的に考慮する。なお、これらの解析において必要な層積分値として $k-\epsilon$ 乱流モデルの解析結果を用いている¹⁰⁾。

2. 成層した流体中の平面二次元密度噴流と噴流層積分方程式

(a) 基礎方程式

成層した流体中に流入する密度噴流の特性を明らかにするため、簡便な手法である層積分法により解析を行う。これより導かれる基礎方程式は、特殊な場合として均一流体中の密度噴流の場合と、密度差のない噴流の場合を含んでいる。

Fig. 1 に示すように線形の密度分布を持つ流体中に流入する密度噴流を考える。流れは平面二次元とし、鉛直下方に x 軸をとり、これと直交方向に y 軸をとる。 x 方向、 y 方向の流速成分を u 、 v とする。周囲流体の密度は次のように表される。

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \beta \frac{x}{h} \right) \quad (1)$$

ここで ρ_1, ρ はそれぞれ、 $x = h$ 、 $x = 0$ での密度を表し、 $\beta = (\rho_1 - \rho_0) / \rho_0$ である。周囲流体が静止しているものと仮定すれば、圧力勾配 $\partial p / \partial x$ は式(1)を用いて次のように表される。

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g = 0 \quad (2)$$

流れの連続式、 x 方向の運動方程式、密度差の原因となるスカラー量 c (例えば、塩分濃度、温度差) の拡

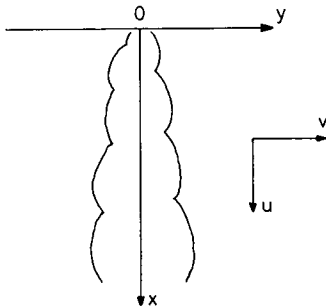


Fig. 1 Defintion sketch of plane vertical plumes.

散方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = (1 + Rc)g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\mu}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (5)$$

ここで、 c は濃度、 R は相対密度差と濃度の比 ($R = c$ が相対密度差) であり、 g は重力加速度、 μ は渦動粘性係数、 σ_t は乱流シュミット数 (塩分濃度の場合) 或は乱流プラントル数 (温度差の場合) である。式(4)に式(1)、(2)を代入すると次式を得る。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = (Rc - \beta \frac{x}{h})g + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4a)$$

ここで、密度噴流の中で濃度分布が相似であると仮定し、次のようにおく。

$$Rc - \beta x/h = Rc_m G(\eta) \quad (6)$$

ここで、

$$\eta = y/b \quad (7)$$

であり、 C_m は中心軸上の濃度である。式(3)を y について 0 から ∞ まで積分すると次式を得る。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty u \, dy + [v]^\infty_0 = 0 \quad (8)$$

これは、連行速度 v_0 を導入し、次のように表される。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty u \, dy = v_0 \quad (9)$$

同様にして、式(4a)の積分を行うと、

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty u^2 \, dy = RgC_m \int_0^\infty G \, dy + [\tau]^\infty_0 \quad (10)$$

ここで $y = 0$ で ∞ せん断応力 τ で零に成ることから、上式は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty u^2 \, dy = RgC_m \int_0^\infty G \, d\eta \quad (11)$$

最後に拡散方程式の層積分は次のように表される。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty uc \, dy + [vc]_0^\infty = \frac{u}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \frac{d}{dx} I_4 u_m c_m b = -\frac{\beta}{Rh} I_1 u_m b \quad (20)$$

式(6), (8)を考慮すると, 上式は次のように表される。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty u c_m G \, dy + \frac{d}{dx} \frac{\beta}{R} \frac{x}{h} \int_0^\infty u \, dy = v_0 \frac{\beta}{R} \frac{x}{h} \quad (13)$$

式(9), (11), (13)により解析を行うためには, 次のように流速の相似分布を仮定する必要がある。

$$u = u_m F(\eta) \quad (14)$$

ここで, u_m は断面最大流速である。このとき, 式(9), (11), (13)に表れる積分は次のように求められる。

$$\int_0^\infty u \, dy = I_1 u_m b \quad I_1 = \int_0^\infty F \, d\eta \quad (15a)$$

$$\int_0^\infty u^2 \, dy = I_2 u_m^2 b \quad I_2 = \int_0^\infty F^2 \, d\eta \quad (15b)$$

$$\int_0^\infty c \, dy = I_3 c_m b \quad I_3 = \int_0^\infty G \, d\eta \quad (15c)$$

$$\int_0^\infty uc \, dy = I_4 u_m c_m b \quad I_4 = \int_0^\infty FG \, d\eta \quad (15d)$$

ここで, 積分 $I_1 - I_4$ は流速分布, 濃度分布により計算される。更に, 密度噴流による連行速度は連行係数を導入することにより次のように表す。

$$v_0 = E_r u_m \quad (16)$$

以上により, 密度噴流の積分型の基礎方程式(層積分方程式と呼ぶ)が次のように求められる。

連続式

$$\frac{d}{dx} I_1 u_m b = E_r u_m \quad (17)$$

運動量方程式

$$\frac{d}{dx} I_2 u_m^2 b = I_3 R g c_m b \quad (18)$$

拡散方程式

$$\frac{d}{dx} I_4 u_m c_m b + \frac{d}{dx} \left(\frac{\beta}{R} \frac{x}{h} I_1 u_m b \right) = E_r u_m \frac{\beta}{R} \frac{x}{h} \quad (19)$$

式(17)を用いると式(19)は次のようになる。

式(17), (18), (20)が成層した流体中に流入する密度噴流の層積分方程式である。以下では, これらが特別な場合に解析解が得られることを示す。さらに, これらの解を数値解析により求める。

(b) 周囲流体の密度が一樣な場合

周囲流体の密度が一樣な場合には $\beta = 0$ であるから, 式(20)は次のように簡便化される。

$$\frac{d}{dx} I_4 u_m c_m b = 0 \quad (21)$$

これを積分すると,

$$I_4 u_m c_m b = Q_c \quad (22)$$

を得る。ここで, Q_c は流出口での濃度フラックスである。式(22)を用いると式(17), (18)が簡便に積分される。この解をまとめて示すと次のようになる。

$$b = \frac{E_r}{I_1} x \quad (23)$$

$$u_m = \left(\frac{I_1 I_3}{I_2 I_4 E_r} \right)^{1/3} (R g Q_c)^{1/3} \quad (24)$$

$$c_m = \left(\frac{I_1^2 I_2}{I_3 I_4^2 E_r^2} \right)^{1/3} \frac{Q_c}{(R g Q_c)^{1/3}} \frac{1}{x} \quad (25)$$

これらの解は, 従来より求められている相似解, 及び積分法によると解と一致する¹⁾²⁾³⁾。

(c) 平面二次元噴流

平面二次元噴流は式(18)において, $c = 0$ とすれば求められる。従って, この場合の基礎方程式は次のように与えられる。

$$\frac{d}{dx} I_1 u_m b = E_r u_m \quad (17)$$

$$\frac{d}{dx} I_2 u_m^2 b = 0 \quad (26)$$

式(26)の積分により, 流出口の運動量束を M として,

$$M = I_2 u_m^2 b \quad (27)$$

が得られる。この場合の解は次のように与えられる。

$$b = 2E_r/I_1 x \quad (28)$$

$$u_m = \left(\frac{I_1 M}{2I_2 E_r x} \right)^{1/2} \quad (29)$$

$$R_0 = \frac{Rg c_{m0} b_0}{u_{m0}^2} \quad (34)$$

$$\beta' = \frac{\beta I_1 b_0}{I_4 R h c_{m0}} \quad (35)$$

(d) 成層中の密度噴流の数値解法

式(17), (18), (20)で表される解の性質を調べるため, これらの式を無次元化する。特性速度, 特性長さ, 特性濃度をそれぞれ, 流出口での速度 u , 流出口の幅 b , 流出口での濃度を c にとり, 変数を無次元化する。すなわち,

$$u_m = u_{m0} \bar{u} \quad (30a)$$

$$b = b_0 \bar{b} \quad (30b)$$

$$c_m = c_{m0} \bar{c} \quad (30c)$$

$$x = b_0 \bar{\xi} \quad (30d)$$

である。ここで (—) を付けた変数及び $\bar{\xi}$ が無次元量であることを表している。これらの関係を式(17), (18), (20)に代入すると次のようになる。

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{u} \bar{b} = \frac{E_r}{I_1} \bar{u} \quad (31)$$

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{u}^2 \bar{b} = \frac{I_3}{I_2} R_{10} \bar{c} \bar{b} \quad (32)$$

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{u} \bar{c} \bar{b} = -\beta' \bar{u} \bar{b} \quad (33)$$

ここで, R_1, β' は, 次式で定義される。

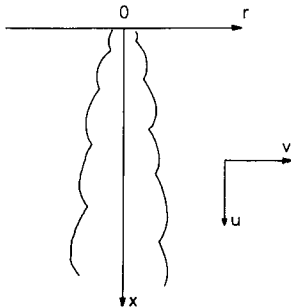


Fig. 2 Defintion sketch of axisymmetric vertical plume.

以上により求められた方程式(31)–(33)は, 無次元量として, 層平均リチャードソン数 R_1 , 無次元密度勾配 β' を含んでおり, これらの値によって解が変化することを意味している。数値解析では, この二つのパラメーターを系統的に変化させて解析を行った。

3. 成層した流体中の軸対称密度噴流と噴流の層積分方程式

(a) 基礎方程式

2. と同様に, 成層した周囲流体中に密度が異なる流体が流入する場合を考える。ここでも周囲流体の密度分布として式(1)で表される場合を考える。Fig. 2のように流れは軸対称二次元とする。x 軸を鉛直下方にとり, これと直交方向に r 軸をとる。流れは軸対称としているので θ には変化しない。x 方向, r 方向の流速成分をそれぞれ u, v とする。他の変数は 2. と同じである。このとき, 流れの連続式, x 方向の運動方程式, 濃度の拡散方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruv) = (1 + Rc)g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(u \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} uc + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rvc) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{u}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad (38)$$

式(1)を用いたとき, 流れ方向の圧力勾配は次のように表される。

$$\left(1 + \beta \frac{x}{h} \right) g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

この式を式(37)に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ruv) = (Rc - \beta \frac{x}{h})g + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(u \frac{\partial u}{\partial r}) \quad (40)$$

式(40)の右辺第1項を次のように表す。

$$Rc - \beta x/h = Rc_m G(\eta) \quad (41)$$

ここで、 η は次のような無次元変数である。

$$\eta = r/b_{1/2} \quad (42)$$

ここでは $b_{2/1}$ は噴流の幅である。式(36), (40), (38)の層積分方程式はこの順で次のように表される。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi ur \, dy = 2\pi bv_0 \quad (43)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty u^2 r \, dy = Rg c_m \int_0^\infty 2\pi Gr dr \quad (44)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi ucr \, dy + 2\pi [vc]^\infty_0 = 0 \quad (45)$$

式(41)を式(45)に代入すると、

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi ucGr \, dy + \frac{\beta}{Rh} \int_0^\infty 2\pi ur \, dr = 0 \quad (46)$$

が得られる。流速分布の相似性を仮定して、

$$u = u_m F(\eta) \quad (47)$$

と置き、式(43), (44), (46)の中の積分の項を評価する。すなわち、

$$\int_0^\infty 2\pi ur \, dr = J_1 u_m A \quad J_1 = \int_0^\infty 2F\eta \, d\eta \quad (48a)$$

$$\int_0^\infty 2\pi u^2 r \, dr = J_2 u_m^2 A \quad J_2 = \int_0^\infty 2F^2\eta \, d\eta \quad (48b)$$

$$\int_0^\infty 2\pi cr \, dy = J_3 c_m A \quad J_3 = \int_0^\infty 2G\eta \, d\eta \quad (48c)$$

$$\int_0^\infty 2\pi ucr \, dy = J_4 u_m c_m A \quad J_4 = \int_0^\infty 2FG \, d\eta \quad (48d)$$

である。ここで、積分 $J_1 - J_4$ は流速分布、濃度分布により計算される。 A は噴流の断面積であり次のように定義される。

$$A = \pi b_{1/2}^2 \quad (49)$$

また、連行係数 E_f を導入し、次のように置く。

$$v_e = E_f u_m \quad (50)$$

以上の準備のもとで式(43), (44), (46)が次のように表される。

$$\frac{d}{dx} J_1 u_m A = 2\pi E_f u_m b_{1/2} \quad (51)$$

$$\frac{d}{dx} J_2 u_m^2 A = J_3 Rg c_m A \quad (52)$$

$$\frac{d}{dx} J_4 u_m c_m A = -\frac{\beta}{Rh} J_1 u_m A \quad (53)$$

式(51)–(53)が線形な密度分布を持つ周囲流体中に流入する密度噴流の基礎方程式である。この場合も2.で示されたような、均一流体中の軸対称密度噴流、軸対称噴流の解が特別な場合として得られる。

(b) 周囲流体の密度が一様な場合

この場合、 $\beta = 0$ であり、式(53)は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} J_4 u_m c_m A = 0 \quad (54)$$

これは直ちに積分できて、

$$J_4 u_m c_m A = Q_{cr} \quad (55)$$

となる。ここで、 Q_{cr} は流出口での濃度フラックスであり、実験条件によって一定値をとる。式(51), (52)よりこの場合の解として次式が与えられる。

$$b_{1/2} = \frac{6}{5} \frac{E_f}{J_1} x \quad (56)$$

$$u_m = \left(\frac{25 J_1^2 J_3}{48 \pi J_2 J_4^2 E_f^2} \right)^{1/3} (Rg Q_{cr})^{1/3} \frac{1}{x^{1/3}} \quad (57)$$

$$c_m = \left(\frac{625}{972} \frac{J_1^4 J_2}{\pi^2 J_3 J_4^2 E_f^4} \right)^{1/3} \frac{Q_{cr}}{(Rg Q_{cr})^{1/3}} \frac{1}{x^{5/3}} \quad (58)$$

(c) 軸対称噴流

噴流の場合には $C_m = 0$ であることから、式(51), (52)は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} J_1 u_m A = 2\pi E_r u_m b_{1/2} \quad (59)$$

$$\frac{d}{dx} J_2 u_m^2 A = 0 \quad (60)$$

式(60)を積分すると、次式を得る。

$$M_r = J_2 u_m^2 A \quad (61)$$

ここで、 M_r は流出口での運動量束である。このとき、式(59)、(61)の解として次式を得る。

$$b_{1/2} = 2(E_r/J_1)x \quad (62)$$

$$u_m = \left(\frac{J_1^2 M_r}{4J_2 E_r^2 x^2} \right)^{1/2} \quad (63)$$

式(62)、(63)は軸対称噴流の解として良く知られたものである¹¹⁾。

(d) 成層中の軸対称密度噴流の数値解法

成層流体中に噴流する軸対称密度噴流の一般的な場合には解析解は求められず、数値解によって解が求められる。この場合にも2.(d)での取扱と同様、方程式を無次元化し、どのようなパラメーターが現象を支配するかを知って置くことが便利である。特性速度、特性長さ、特性濃度をそれぞれ、流出口での速度 u_m 、流出口の面積 A_0 、流出口での濃度 C_m にとり、変数を無次元化する。すなわち、

$$u_m = u_{m0} \bar{u} \quad (64a)$$

$$A = A_0 \bar{A} \quad (64b)$$

$$c_m = c_{m0} \bar{c} \quad (64c)$$

$$x = \sqrt{A_0/\pi} \xi = b_{1/20} \bar{\xi} \quad (64d)$$

ここで、(–)を付けた変数及び $\bar{\xi}$ が無次元量であることを表している。式(64)を式(51)–(53)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{u} \bar{A} = 2E_r \bar{J}_1 \bar{u} \sqrt{\pi \bar{A}} \quad (65)$$

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{u}^2 \bar{A} = \frac{J_3}{J_2} R_{10} \bar{c} \bar{A} \quad (66)$$

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} \bar{u} \bar{c} \bar{A} = -\beta'' \bar{u} \bar{A} \quad (67)$$

ここで、 R_{10} は次式で定義される放出口での断面平均リチャードソン数、 $b_{1/2,0} = b_0$ は放出口での半値幅である。

$$R_{10} = \frac{Rg c_m b_{1/20}}{u_{m0}} \quad (68)$$

また、 β'' は次式で定義される無次元密度勾配である。

$$\beta'' = \frac{J_1 \beta c_m b_{1/20}}{J_4 R h c_{m0}} \quad (69)$$

以上により求められた方程式(65)–(67)は、無次元量として、断面平均リチャードソン数 R_{10} 、無次元密度勾配 β'' を含んでいる。したがって、これらの二つのパラメーターによって解が変化することが分かる。

4. 解析結果と考察

平面二次元の密度噴流と軸対称二次元の密度噴流の数値解析を次のような条件に対して行った。

- (a) 一様体中に流入するリチャードソン数の異なる流れ。
- (b) 密度が線形分布する周囲流体中に流入するリチャードソン数の一定の流れ。
- (c) 浮力の方向の逆の向きに流入する流れ。この場合には、一様流体中の噴流を含んでいる。

計算に用いた積分の値と連行係数の値を Table 1. に示す。平面二次元密度噴流、軸対称二次元密度噴流の何れの場合も (a)、(b) の計算では plume の値を用い、(c) の計算では jet の値を用いた。

Fig. 3(a)–(d)は、二次元密度噴流の(a)の計算結果を図示したものである。Fig. 3(a)は、リチャードソン数の違いによる無次元最大流速の流下距離方向の変化を、Fig. 3(b)は流速の半値半幅の変化を、Fig. 3(c)は最大濃度の変化を、Fig. 3(d)は式(68)で求められるリチャードソン数の変化を示している。また、図中に示された丸印は、Kotsovinosの実験値(PLVT 1)であ

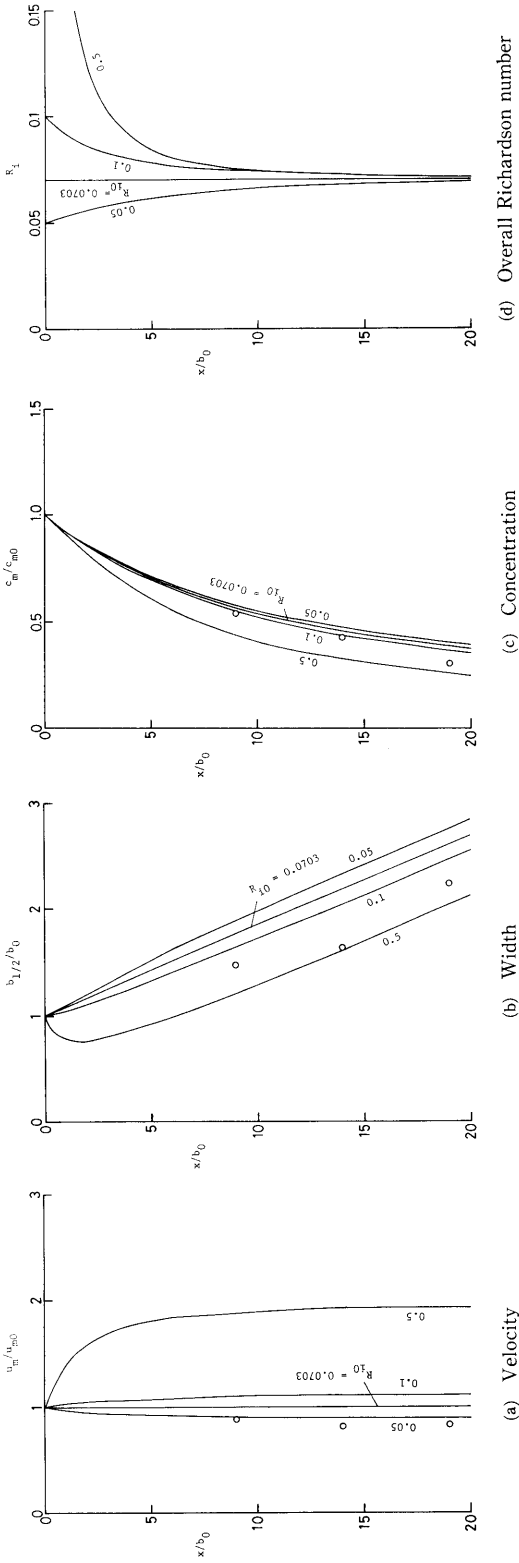


Fig. 3 Characteristics of plane plume in a uniform environment. Circles indicate Kotsovinos's experimental data.

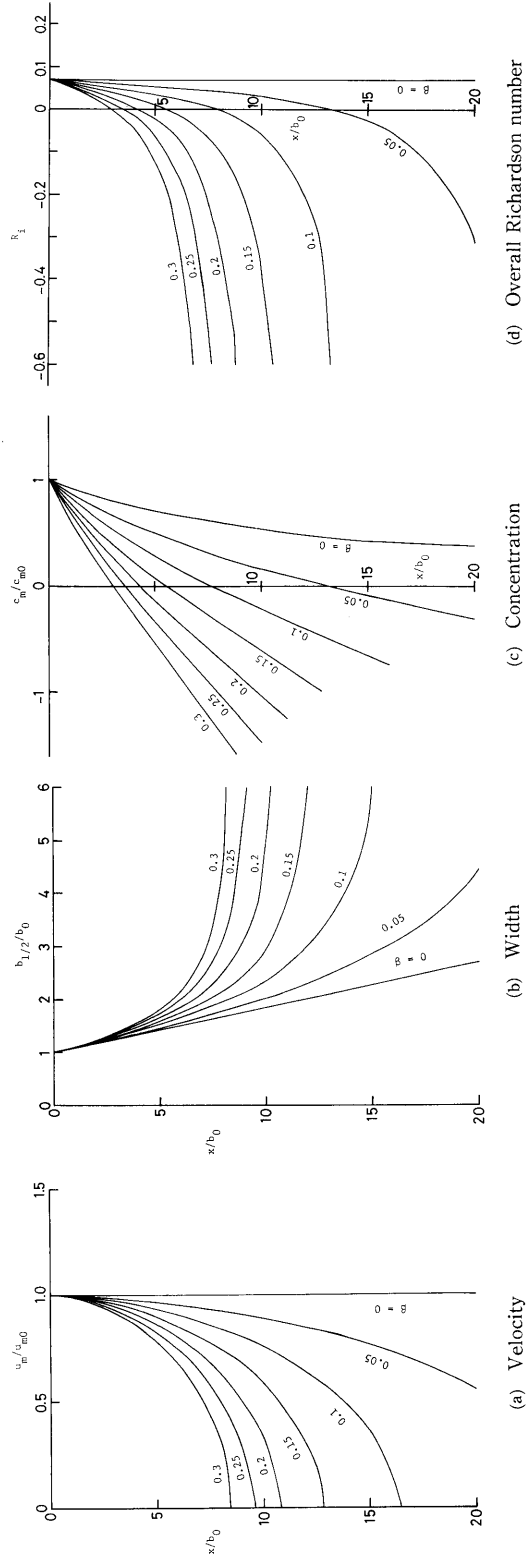
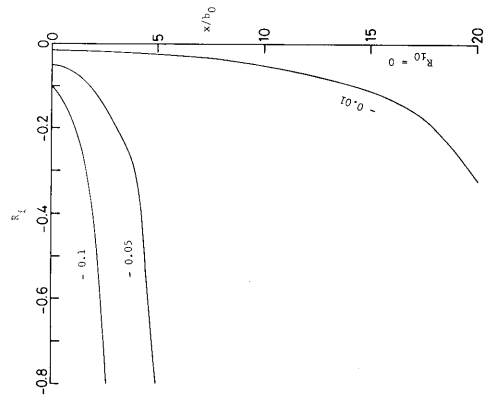
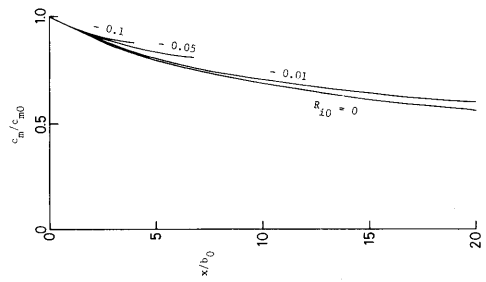


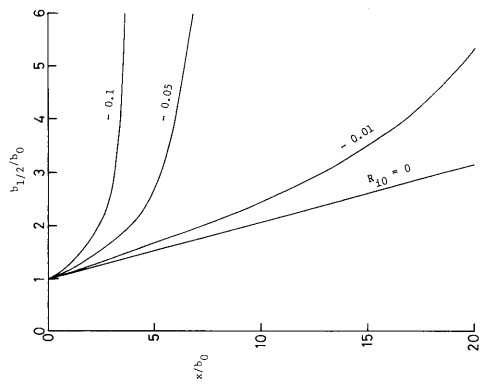
Fig. 4 Characteristics of plane plume in a stratified environment.



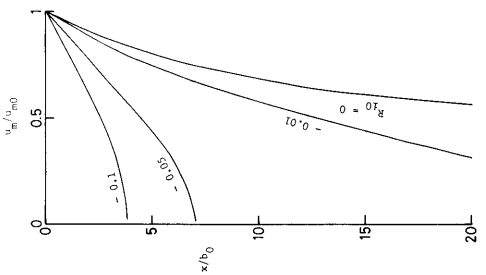
(a) Velocity



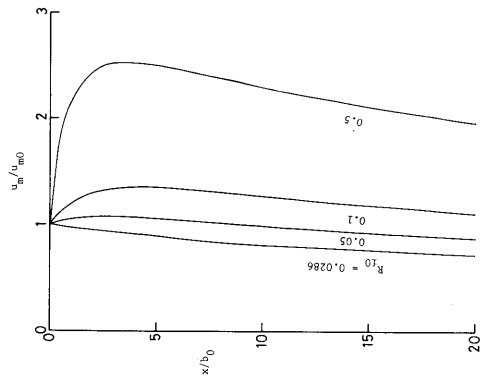
(b) Width



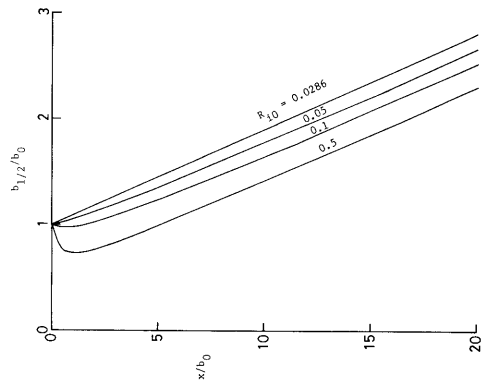
(c) Concentration



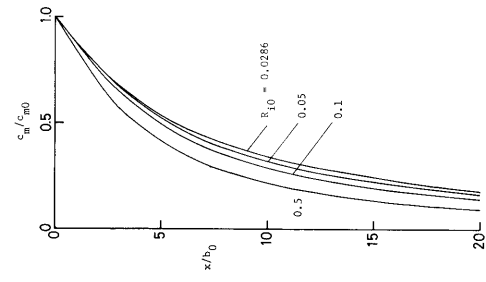
(d) Overall Richardson number



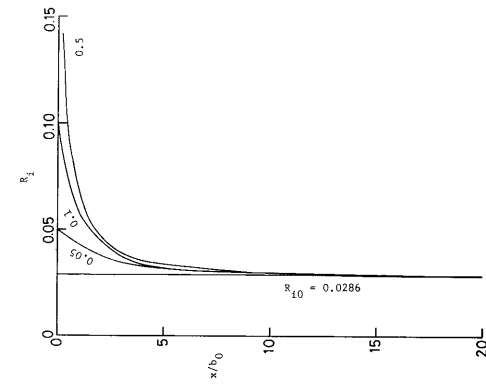
(a) Velocity



(b) Width



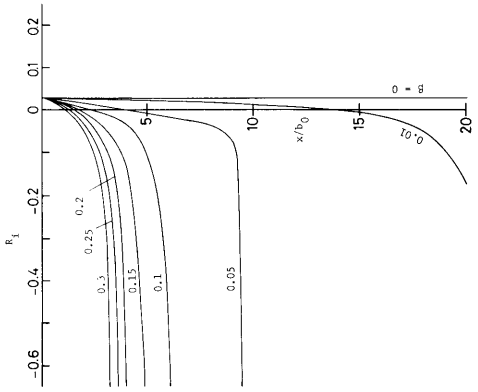
(c) Concentration



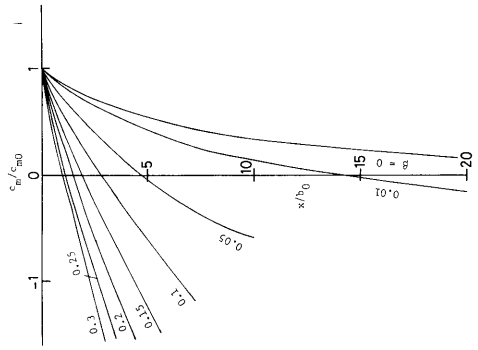
(d) Overall Richardson number

Fig. 5 Characteristics of plane plume in a negative buoyancy direction.

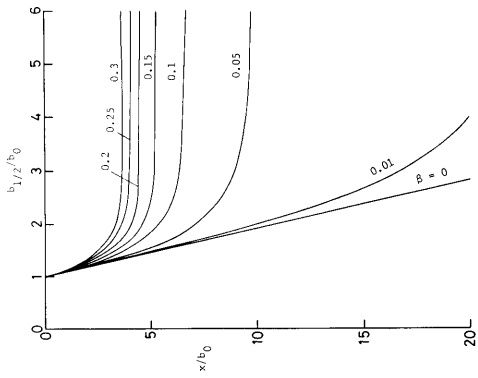
Fig. 6 Characteristics of round plume in a uniform environment.



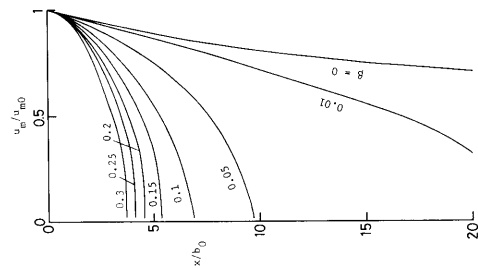
(a) Velocity



(b) Width

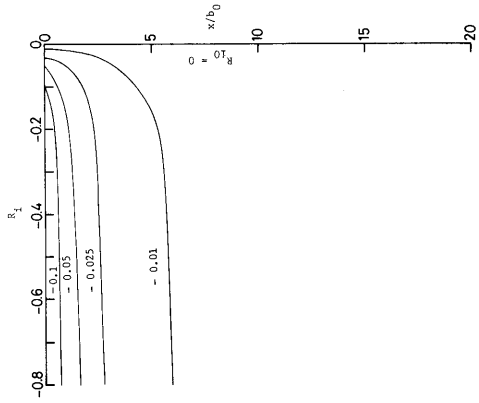


(c) Concentration

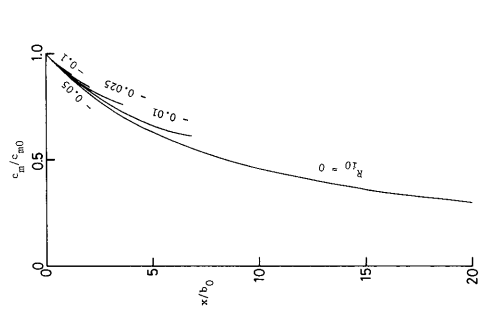


(d) Overall Richardson number

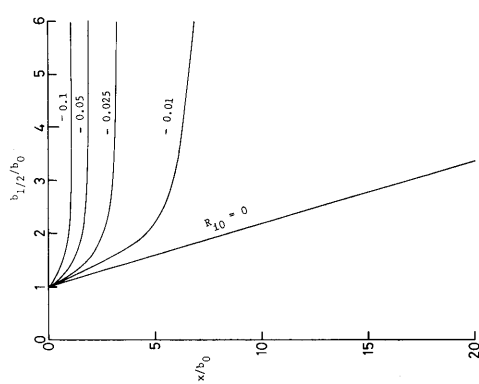
Fig. 7 Characteristics of round plume in a stratified environment.



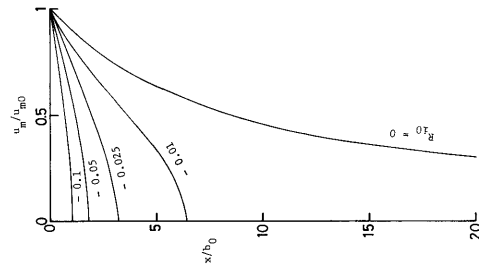
(a) Velocity



(b) Width



(c) Concentration



(d) Overall Richardson number

Fig. 8 Characteristics of round plume in a negatively buoyancy direction.

る。この場合には、流下距離が充分大きいとき式(23)–(24)で示される流れの確立領域が存在する。すなわち、流速が一定となり、噴流幅が直線的に増加し、濃度が流下距離に反比例して減少し、リチャードソン数が一定となる領域である。Fig. 3より、 $x/b > 5$ の領域で流れの確立領域に至っていることが分かる。

Fig. 4(a)–(d)は、(b)の場合の計算結果である。この場合には、周囲水の成層の度合を表す無次元パラメーターとして、式(35)で表される β' を変化させた。Fig. 4(a)–(d)は、Fig. 3(a)–(d)に対応されており、ここでは説明を省略する。計算の初期条件としては、Fig. 3(d)で得られた平衡状態のリチャードソン数 $Ri = 0.0704$ を用いている。この場合の特徴は、周囲流体の成層度を表す β' の値によって、最大到達距離が定まる点にある。また、噴流が最大到達距離に近づくに従って、噴流幅は急激に増加し(Fig. 4(b))、流速は急激に減少する(Fig. 4(a))。この原因は、最大到達距離に近づくに従って、密度差が周囲流体の密度と比べると相対的に密度差が正から負に変化するためである(Fig. 4(c))、これらの結果としてリチャードソン数もまた正から負に転じている(Fig. 4(d))。

Fig. 5(a)–(d)は、(c)の場合の計算結果を描いたものである。この場合は、式(32)において $Ri < 0$ に相当する。また、比較すべき結果として、一様流体中に流入する中立噴流の結果も示している(図中 $Ri = 0$ の場合)、この場合も流れの方向が浮力の方向と異なるため、密度噴流がそれ以下には流入できない条件が存在する。すなわち、 Ri が小さいほど最大流下距離は小さくなる。このばあいの結果もFig. 4(a)–(d)と同様な特性を持つ。すなわち、最大流下距離は近づくに従って、噴流幅が急激に増加し、流速は零に近づく。

次に軸対称二次元の数値解析結果について述べる。Fig. 6(a)–(d)は、(a)の結果を示したものである。この結果は、平面噴流のFig. 3に相当する。この条件では流下距離が大きくなると式(56)–(58)で与えられる平衡状態に近づく、すなわち、 $B \propto x$ 、 $U \propto 1/x^{1/3}$ 、 $C \propto$

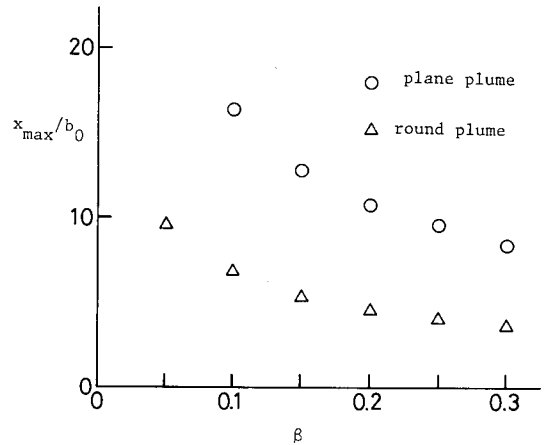


Fig. 9 Maximum depth of plane and round plumes in a stratified environment.

$1/x^{5/3}$ 、 $Ri \propto \text{const}$ である。この特徴は、 $x/b > 5$ の範囲で成立しており、流れが平衡状態に達していることが示される。

Fig. 7(a)–(d)は、Fig. 6で得られた平衡状態を初期条件とし、周囲流体の成層度を表すパラメーター β' を変化させた(b)の計算例である。このとき、 $Ri = 0.0283$ である。Fig. 7(a)は流速、Fig. 7(b)は噴流の流速の半値半幅、Fig. 7(c)は最大濃度、Fig. 7(d)は層平均リチャードソン数の流下距離変化を表したものである。層平均リチャードソン数は、式(68)で定義されている。この場合にもFig. 4と同様、噴流がそれよりも下方に行かない最大流下距離が存在する。当然のことながら、最大流下距離は、 β' が大きい程小さくなる傾向がある。ただし、最大流下距離は平面二次元の場合に比べて小さくなる傾向にある。

Fig. 8(a)–(d)は、(c)の計算例である。この図にも式(62)、(63)での一様流体中の噴流の解も示されている。これらの図から分かる様に、この計算結果も周囲流体より軽い密度噴流は、途中で静止に至り、最大流下距離のあることが分かる。

Table 1 Values of layer integral and calculational results

flow type	I_1	I_2	I_3	I_4	E_r	$\eta_{1/2}$		U_{max}		C_{max}		
						k- ϵ	layer	k- ϵ	layer	k- ϵ	layer	
plane	plume	0.933	0.680	0.817	0.623	0.0789	0.0848	0.0846	2.79	2.84	6.55	6.69
	jet	1.060	0.754	1.009	0.730	0.0573	0.108	0.108	3.44	3.54	—	—
round	plume	1.238	0.672	0.917	0.544	0.0942	0.0911	0.0913	4.10	4.16	17.2	16.88
	jet	1.378	0.691	1.385	0.691	0.0802	0.116	0.116	5.85	5.83	—	—

note 'k- ϵ ' means calculation by k- ϵ turbulence model.

'layer' means calculation by layer integral method.

Fig. 9 は, Fig. 4, Fig. 5 より得られる最大流下距離を成層度パラメーター β' あるいは β'' に対してプロットしたものである。この図より, 最大流下距離は β' とともに次第に小さくなるのが分かる。また同じ β' に対しては, 平面二次元の方が軸対称二次元に比べて, 最大流下距離が大きくなっている。これは, 軸対称二次元の方が平面二次元に比べて, 相対的に連行量が大きく, 希釈率も大きいためである。

Table 1 には, 著者が $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いて計算した無次元噴流幅 $\eta_{1/2}$, 無次元最大速度 U_{max} , 無次元最大濃度 C_{max} 及び本研究で得られた値を比較して示す。これから明らかなように本研究の層積分法の結果は, 乱流モデルの相似解と極めてよく一致していることが分かり, 層積分法の解析の妥当性は充分といえる。

5. 結 論

以上のように, 線形の密度成層をなす周囲流体に流入する平面二次元密度噴流と軸対称二次元密度噴流を層積分の手法により解析を行った。この解析手法は, 密度成層のない場合, 中立噴流, 密度の逆転した場合にも適用できる汎用性の高い手法である。方程式の無次元化により, この現象は, 噴流出口での層平均リチャードソン数と密度場の成層度を表すパラメーターである β' に依存することが示された, すなわち, 周囲流体が成層しているとき, 相対的に密度差が小さくなり, 流速が減少しさらには, 密度噴流が静止にいたる結果を得る。この噴流の最大到達距離は無次元密度勾配 β' の関数であることが示された。

以上のように本研究によって, 種々の密度流現象が説明できることが分かる。しかし, 特に負の浮力を持

つ密度の逆転した場合には, 最大到達点に達した後浮力の作用により逆流を生ずる。この点については本解析で考慮されていない。従って, 本解析の結果は小さいめの最大到達高さを与えているものと予測される。

最後に, 本論文中の図面の清書をお願いした, 本学元技官吉原健氏(現在新潟大学)に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Morton, B.R., Taylor, S.G. and Turner, J.S., turbulent gravitational convection of instantaneous sources, Proc. Roy. Soc., A 234, pp 1-23, 1956.
- 2) Morton, B.R., Forced plume, Jour. Fluid Mech., Vol. 5, pp. 151-163, 1959.
- 3) Turner, J.S. . S., Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press, pp. 178-187, 1973.
- 4) Rouse, H., Yih, C.S. and Humphreys, H.W., Gravitational convection from a boundary source, Tellus, Vol. 4, pp. 201-210, 1952.
- 5) 玉井信行, 密度流の水理, 技報堂出版, pp. 69-85, 1980.
- 6) Kotsovinos, N.E., A study of the entrainment and turbulence in a plane buoyant jet, Ph.D thesis, California Institute of Technology, 1975.
- 7) Kotsovinos, N.E. and List E.J., Plane turbulent jets, Part 1 Integral properties, J. Fluid Mech. Vol. 81, pp. 25-44, 1977.
- 8) 小松利光, 浦勝, 2次元密度 Plume に於ける組織渦の構造と連行現象, 第28回水理講演会論文集, pp. 311-319, 1984.
- 9) 福嶋祐介, 乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析, 土木学会論文集, 第399号, II-10, pp. 103-112, 1988.
- 10) 福嶋祐介, $k-\epsilon$ 乱流モデルによる平面二次元密度噴流と噴流の相似解析, 土木学会論文集, 第405号, II-11, pp. 10-17, 1989.
- 11) Rajaratnam, N., TURBULENT JETS, Elsevier Scientific Pub. Co., 1976. 野村安正訳, 噴流, 森北出版, pp. 26-34, 1980.