研究ノート

次元解析再考

白 樫 正 高*

Reconsideration on the Dimensional Analysis

Masataka SHIRAKASHI

Description on the dimensional analysis is found in any text book on hydraulics or fluid mechanics because of its importance for engineering applications such as flow experiments using reduced models. However. assumptions and derivation process for the dimensional analysis are not fully discussed in the prevailing text books. In this article, it is shown that the only principle needed for it is the "Principle of objectivity of physical phenomena (POPP)". It is also reconfirmed that the assumption needed to derive POPP is the well-accepted fact that two physical quantities is added or subtracted only when they have a same dimension.

Key words: Fluid mechanics/Hydraulics/Dimensional Analysis/Principle of objectivity of physical phenomena

1. はじめに

流れが関与する現象を予測するために模型実験がしばしば用いられる。現在建設中の明石海峡大橋についても風洞内で100分の一の縮尺模型について，風によりいかなる力が加わるかが調べられている。次元解析は，このような実物とは大きく寸法が異なる模型により得られた結果が，なにゆえ，どのようにして実物に適用できるのか，についての理論的根拠を与えている。したがって，ほとんどの水力学，流体力学関係書[1]において次元解析あるいはその一般形式であるバッキンガムの π 定理の説明がなされている。しかしながら，筆者の知る範囲では，これらにおいては適用方法の記述が主体で，次元解析の手法が成立するための仮定とこれが導かれる論理の説明が不十分であるため，いわゆる天下り的な印象を受ける。このような感想から筆者は以前に「ながれ」に私見を述べて諸先輩の批判を乞うたが[2]，その後，前報における疑問に対する一つ解答を得た。そこで，ここに改めて筆者の考えと疑問を整理して説明し，ご意見ご教示を乞う次第である。

2. 現象客観性の原理の導出

次節に述べるように，次元解析の正当性に根拠を与えているものは，筆者が現象客観性の原理と呼んでいる『物理現象に関与する物理変数の関係を記述する式は単位系の選択に依存しない』と言う法則である。しかしながら，このことを明確に指摘し，この法則の導出を説明している書は見当たらないようなので，次元解析の説明に先立って本節でこれを導く。

2-1 単位について

物理量 x_i は，その次元について適当に定められた基準となる量すなわち単位を $[X_i]$ とすれば，$x_i = x^*_i [X_i]$ のように表わされる。ここに，x^*_i は x_i が基準量 $[X_i]$ の何倍であるかを表わす無次元の数値である。以下本稿では記号*により無次元の量を表わす。基準となる量は使用する立場により便利なように勝手に選んでよいので，同じ次元の量，例えば長さに対して1尺と1メートルのように異なる量を基準とする単位が存在する。上と同じ物理量 x_i に対して，異なる単位 $[X_i']$ が存在するとき，c_i^* を換算率を表わす無次元の数値として，

$$[X_i'] = c^*_i\ [X_i] \quad \cdots\cdots(1)$$

でなければならない。

2-2 物理量の関係を表わす式の次元的健全性

異なる次元を持つ物理量の加減算…15kg と20m を足し算あるいは引算するようなこと…ができないことは自明である。すなわち，物理量の関係を記述する式は次元的に健全でなければならない。ある現象におい

原稿受付：平成6年5月31日
*長岡技術科学大学機械系

て物理量Qが x_i (i=1～n) なるn個の物理量によって決定されるとき，それらの関係を表わす式

$$Q=F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \cdots\cdots(2)$$

が『次元的に健全である』ということは，F (x_i) が次式のように変形できることを意味する。

$$\begin{aligned} F(x_i) &= F(x^*_i[X_i]) \\ &= [X_1]^{a_1}[X_2]^{a_2}\cdots[X_n]^{a_n} \\ &\quad \times F^*(x^*_1, x^*_2, \cdots, x^*_n) \quad \cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

ここに，F^*は無次元の変数 x^*_i (i=1～n) の関数であり，当然無次元である。また，Q の次元は右辺の指数 $a_1, \cdots, a_n$により決定される。

2-3　単位系の変換

別の単位 $[X_i']$ を用いたとき，同じ現象についての物理量Qと x_iの関係が，式(2)とは異なる関数

$$Q=F'(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \cdots\cdots(4)$$

により表わされるとすれば，この式も次元的に健全でなければならないので，

$$\begin{aligned} F'(x_i) &= F'(x^{*\prime}_i[X_1']) \\ &= [X_1']^{a_1'}[X_2']^{a_2'}\cdots[X_n']^{a_n'} \\ &\quad \times F^{*\prime}(x^{*\prime}_1, x^{*\prime}_2, \cdots, x^{*\prime}_n) \end{aligned}$$

これに式(1)を代入すれば，

$$\begin{aligned} F'(x_i) &= F'(x^{*\prime}_i[X_1']) \\ &= (c^*_1[X_1])^{a_1'}\cdots(c^*_n[X_n]^{a_n'}) \\ &\quad \times F^{*\prime}(x^{*\prime}_1, x^{*\prime}_2, \cdots, x^{*\prime}_n) \\ &= (c^{*}_1{}^{a_1'} c^{*}_2{}^{a_2'}\cdots c^{*}_n{}^{a_n'})\ ([X_1]^{a_1'}\cdots \\ &\quad \cdots[X_n]^{a_n'})F^{*\prime}(x^{*\prime}_1, x^{*\prime}_2, \cdots, x^{*\prime}_n) \quad \cdots\cdots(5) \end{aligned}$$

2-4　現象客観性の原理の導出

式(2)と(4)は同じ現象における同じ物理量Qを表わす式であるから，その次元は互いに等しくなければならないので，

$$a_i=a_i' \quad \cdots\cdots(6)$$

また，両者は同時に成立するので，式(3)と(5)を等置し，式(6)を用いることにより，

$$[X_1]^{a_1}[X_2]^{a_2}\cdots[X_n]^{a_n}\ \{F^*(x^*_1, x^*_2, \cdots, x^*_n) - (c^{*}_1{}^{a_1} c^{*}_2{}^{a_2}\cdots c^{*}_n{}^{a_n})\times F^{*\prime}(x^{*\prime}_1, x^{*\prime}_2, \cdots, x^{*\prime}_n)\}=0$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} &F^*(x^*_1, x^*_2, \cdots, x^*_n) \\ &\quad = (c^{*}_1{}^{a_1} c^{*}_2{}^{a_2}\cdots c^{*}_n{}^{a_n}) \\ &\quad\quad \times F^{*\prime}(x^{*\prime}, x^{*\prime}_2, \cdots, x^{*\prime}_n) \quad \cdots\cdots(7) \end{aligned}$$

すなわち，$F^*(x^*_i)$は，$F^{*\prime}(x^{*\prime}_i)$に無次元の定数$(c^{*}_1{}^{a_1} c^{*}_2{}^{a_2}\cdots c^{*}_n{}^{a_n})$を乗じた形でなければならない。したがって，物理量Qを表わす式は単位を変換した場合でも，各項が共通の係数倍されることを除けば，関数形は変わらない。

3.　次元解析

次元解析によって，式(2)のような現象に関与する物理量の間の関係を表わす式を，より少ない個数の無次元数の関係で表わすことができる。また，模型実験の結果から得たこの無次元数の関係を一般的に適用することにより実際の現象の予測が可能となる。本節では，現象客観性の原理から次元解析を導く過程を具体的な例に沿って説明する。

3.1　単位系について

物理量の大きさは，例えば，長さ2.5m，5Nの力というように，適当に定めた基準量すなわち単位とそれの何倍であるかを表わす数値により示される。長さ，質量，時間の単位をm，kg，sと定めれば，力＝質量×加速度の関係から力の単位として$1kg\cdot m/s^2=1N$とすることができるので，新たに力の単位を独立に設ける必要はない。このように，単位の中には，基準量として独立に定義されているものと，物理法則に基づいてこれらを組み合わせることによりつくられるものとがある。前者を基本単位，後者を組み立て単位あるいは誘導単位と呼ぶ。基本単位とその誘導単位から成る一群の単位を単位系と呼ぶ。国際単位系 (SI) では質量 (kg)，長さ (m)，時間 (s) を基本単位としているが，工学単位系では力 (kgf)，長さ (m)，時間 (s) を基本単位としており質量は誘導単位である。何を基本単位とし，何を誘導単位とするかについての原則はないので，習慣や歴史を無視するならば，どのような単位系も立場は同等であり，使うのに便利な単位系を選べばよい。上の説明から，単位系の構成において次の二つの原則が成り立つことが分かる。

原則 I：同じ数の物理量を表わすために必要な基本単位の数は，単位系によらない。

原則 II：互いに独立の次元を持つならば，どの物理量を基本単位として選んでも良い。

3.2　次元解析の考え方と手順

次元解析は，その現象における物理量の中から適当に選んだ量を基本単位とする単位系により式を記述することにより実行される。図1の球に作用する抗力Dを模型実験により求める場合を例として，次元解析の手順を以下に説明する。

(1)　ある物理現象は，特定の物理量が条件として与え

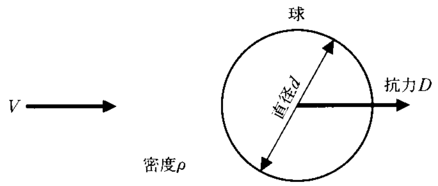

図1　一様流中の球に作用する抗力

られれば決定される。図1の例では，球の抗力Dは以下の変数が条件として与えられれば決まるものと仮定する。

流体の性質：　密度ρ，粘度μ
速度場の条件：　一様流速V
物体の大きさ：　球の直径d

このとき，抗力DはFを一般の関数として

$$D=F(\rho,\ \mu,\ V,\ d) \quad \cdots\cdots(8)$$

(2)　この現象を代表する量を基本単位とする新しい単位系を構成し，これにより式(8)を表わすことを想定する。いま，式(8)に含まれる物理量を表わすのに必要な基本単位の数をSIで数えれば，m，kg，sの3ケであるので，新しい単位系でも3ケの基本単位が必要な事が原則Iから分かる。そこで，式(8)の右辺の現象を決定する物理量の中から，基本単位として適当なものを3ケ選ぶ。原則IIにより，選ばれる物理量は次元が互いに独立であれば任意であるので，尺度として分かりやすいものほどよい。ここではd，V，ρを選ぶ。

(3)　式(8)中の，上で基本単位として選んだものを除くすべての変数に対する誘導単位を決定する。すなわち，抗力Dと粘度μに対して

$$[D]=MLT^{-2}=[\rho d^3\cdot d\cdot(d/V)^{-2}]$$
$$=[\rho d^2V^2]$$
$$[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$$
$$=[\rho d^3\cdot d^{-1}\cdot(d/V)^{-1}]=[\rho Vd]$$

(4)　式(8)を上の単位系で表わす。現象客観性の原理から，この単位の変換を行なっても関数形は変わらないので，

$$D/(\rho d^2V^2)=F\{\rho/\rho,\ \mu/(\rho Vd),\ V/V,\ d/d\}$$
$$=F\{1,\ \mu/(\rho Vd),\ 1,\ 1\} \quad \cdots(9)$$

すなわち，この単位系で表わされた抗力$D/(\rho d^2V^2)$は，この単位系で表わされた粘度$\mu/(\rho Vd)$のみの関数であることがわかる。

ここに，$D/(\rho d^2V^2)$，$\mu/(\rho Vd)$は無次元である。

以上の手順は一般に式(2)のような関係が成り立てば適用できる。すなわち次元解析は，適当に選んだ代表量を基本単位とする単位系により式を記述することにより，ある現象における物理量間の関係を，含まれる基本単位の数だけ少ない個数の無次元数で表わす操作である。これにより得られた無次元数の関数は単位系の選択によらないので，図1の例で言えば，直径1cmの球に作用する水流の力についての実験結果から直径50mの球形タンクに作用する風の力を予測することができるのである。

4．結　　言

以上の説明により，次元解析は現象客観性の原理のみを仮定として導かれるものであることが示された。すなわち本稿の初めに述べた，長さと質量のような次元が異る量の加減算ができないことがその根拠となっている。ところで，このことは果たして自明であろうか。ジュールの発見の以前に，重いものを持ち上げる作用と，やかんの水を沸かすのに必要なこととが同じ物理的意味を持つ量であると考えるものは少なかったであろう。しかるに今日では，機械的エネルギーと熱エネルギーは等価であると信じられ，熱エネルギーの単位としてカロリーに替わりジュールが用いられている。この歴史的事実を見ると，上の自明であるはずの事柄にもやや疑問が生じ，根拠となる仮定の確認と何らかの証明とがあるべきようにも思われる。これに関し読者諸賢のご教示が頂ければ幸いである。

文　　献

1）例えば，H．ラウス（有江幹男訳），流体工学，工学図書（昭和49年），6．
2）白樫正高，ながれ，Vol. 1，134（1982）．