

傾斜壁面密度噴流の流動場のCGによる表示法について

福 嶋 祐 介*

Presentation of Flow Field of Inclined Wall Plume Using Computer Graphics

Yusuke FUKUSHIMA

The simultaneous ordinary differential equations for the developed region of the inclined wall plumes are derived using the $k-\epsilon$ turbulence model. The numerical results of this analytical model is compared with the experimental results which are obtained from the measurement by the Laser Doppler Anemometer. The present model explains well the experimental results of the distributions of the average velocity, the kinetic energy of turbulence, the Reynolds stresses, and the eddy viscosity. Then, the several presentation methods of the flow fields by the computer graphics (CG) are examined. As a result, the presentation of time variation of the fluid particle path is the most effective method describing the flow field.

Key words: inclined plumes/gravity current/computer graphics/turbulence model

1. はじめに

周囲流体と密度の異なる流体が傾斜した壁面の近くにあると、その流体は壁面に沿って上昇または下降する。このような流動を傾斜壁面密度噴流あるいは傾斜ブリュームと呼ぶ。傾斜壁面密度噴流と類似の現象に近くに壁面が存在せず鉛直方向に流動する、鉛直密度噴流が挙げられる。傾斜壁面密度噴流と鉛直密度噴流との大きな違いは、壁面があるか否かにある。壁面においては滑りなしの境界条件を満たす必要があり、単純な鉛直密度噴流の流速分布と大きく異なる流速分布となるからである。

噴流は密度差が存在せず流出口での運動量フラックスによって駆動する流れであり、鉛直密度噴流をより単純化した流れと見なせる。噴流もまた固定壁面の影響を受けない典型的な自由乱流であり、境界層近似と混合距離理論の仮定により流速分布が得られている¹⁾。

傾斜壁面密度噴流は駆動力が流出口での浮力フラックスであり、さらに固定壁面の影響を受けるため、古典的な混合距離理論で解析することは不可能である。言うのも乱流の解析に必要な渦動粘性係数の分布が不明確であるためである。近年普及が著しい $k-\epsilon$ 乱流モデルでは、乱れ運動エネルギー k 、分子粘性逸散

率 ϵ を未知数とし、これらの関数として渦動粘性係数が求められる利点がある²⁾。さらに固定壁面での境界条件として壁関数法が確立している点でも傾斜壁面密度噴流の解析に適している³⁾。本研究では境界層近似を用いた $k-\epsilon$ 乱流モデルによって、傾斜壁面密度噴流の相似解が満たすべき微分方程式を求め、これを数値解析によって解を求めることを目的とする。このようにして得られた相似解は著者ら⁴⁾が行った室内実験の結果と比較し妥当性を検討する。

数値解析の結果は数表であり、それによってどのような解となっているかを判断することは不可能である。そこで数表をもとに分布図を描き実測結果との比較を行うことが一般的である。最近のパーソナルコンピュータ(パソコン)レベルでもコンピュータグラフィックス(CG)の機能は充実が著しく、複雑な流れ場の表示法として用いることが行われつつある。そこで本論文ではCGを応用して、流速分布と濃度分布の流下距離変化、流速ベクトル図、流速のタイムライン、流線図、流体粒子の軌跡の時間変化などを図化することによって、どのような流れ場の表示方法が流体力学を専門としない人への説明に適しているかを検討することを第二の目的とする。ここで、タイムラインとは、一定の時間間隔で移動する流体の位置を図化したものである。

原稿受付：平成7年5月8日

*長岡技術科学大学工学部建設系

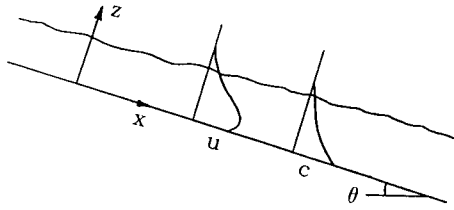


Fig. 1 Definition sketch of the steady part of inclined wall plume.

2. 傾斜壁面密度噴流の相似解

2.1 基礎方程式

Fig. 1 のように傾斜角 θ の傾斜上を周囲水より重い流体が流下する場合を考える。流れは非圧縮で定常、二次元とする。流入流体と周囲流体との密度差は小さく、Boussinesq 近似が成立するものとする。また、主流方向の流れが横方向の流れに比べて卓越していると考えられるので、境界層近似が成り立つ。流れは十分発達した乱流であり、分子粘性逸散率の項を除いて粘性の影響が小さい場合を想定する。Fig. 1 に流れの模式図と記号を示す。流下方向の座標を x 、これと直交方向上向き座標を z とする。 x, z 方向の平均流速を u, w とし、平均濃度を c とする。このような流れを $k - \epsilon$ 乱流モデルを用いて解析する。つまり、乱流の解析で通常用いられる連続式、レイノルズ方程式に加えて、乱れ運動エネルギー k 、分子粘性逸散率 ϵ を未知数として取扱い、渦動粘性係数 ν_t を k と ϵ から計算する。

流れの連続式は次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

x 方向の運動方程式 (レイノルズ方程式) は次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = Rcg \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h Rcdz - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \quad (2)$$

ここで、 g は重力加速度、 R は相対密度差と重量濃度との比 (Rc が相対密度差)、 u', w' はそれぞれ、 x 方向、 z 方向の変動流速であり、 $-\overline{u'w'}$ はレイノルズ応力である。

密度差の主因となるスカラー量の拡散方程式は次のようになる。

Table 1 Coefficients in $k - \epsilon$ turbulence model

| c_u | σ_k | σ_ϵ | $c_{1\epsilon}$ | $c_{2\epsilon}$ | $c_{3\epsilon}$ | σ_c |
|-------|------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------|
| 0.09 | 1.0 | 1.3 | 1.44 | 1.92 | 0.8 | 1.0 |

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + w \frac{\partial c}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} (\overline{c'w'}) \quad (3)$$

ここで、 c' は濃度の変動量であり、 $-\overline{c'w'}$ は濃度速度相関である。レイノルズ応力 $-\overline{u'w'}$ 、濃度速度相関 $-\overline{c'w'}$ は渦動粘性係数 ν_t 、渦拡散係数 $k_s = \nu_t / \sigma_t$ を用いて次のように表される。

$$-\overline{u'w'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

$$-\overline{c'w'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \quad (5)$$

乱れ運動エネルギー k の輸送方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + w \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} - \epsilon \quad (6)$$

ここで、 σ_k はモデル定数である。式 (6) の右辺第一項は乱れ運動エネルギーの拡散、第二項は平均流による乱れ運動エネルギーの生成、第三項は濃度勾配による乱れ運動エネルギーの消費、第四項は乱れ運動エネルギーの分子粘性逸散率を表す。

分子粘性逸散率 ϵ の輸送方程式は次のように表される。

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + w \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + (1 - c_{3\epsilon}) Rg \cos \theta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial c}{\partial z} \right\} - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (7)$$

ここで、 $\sigma_\epsilon, c_{1\epsilon}, c_{2\epsilon}, c_{3\epsilon}$ はモデル定数である。式 (7) の右辺第一項は ϵ の拡散、第二項は ϵ の生成、第三項は ϵ の消費を表す。

$k - \epsilon$ 乱流モデルでは渦動粘性係数 ν_t を乱れ運動エネルギー k 、分子粘性逸散率 ϵ を用いて次のように表す。

$$\nu_t = c_u \frac{k^2}{\epsilon} \quad (8)$$

ここで、 c_u はモデル定数である。

式 (4) - (8) に含まれるモデル定数の値は様々な流れに対して検討されており、Table 1 のように定められている²⁾。このうち、 $c_{3\epsilon}, \sigma_t$ は著者が傾斜壁面密度噴流の実験値との比較を行い定めたものである³⁾。

2.2 相似解の仮定とその解法

相似解を求めるにあたり流関数 ψ を導入する。このとき x 方向の流速 u 、 z 方向の流速 w は次のように表され、連続の式(1)は自動的に満たされる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{9}$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10}$$

未知数は流関数 ψ 、濃度 c 、乱れ運動エネルギー k 、分子粘性逸散率 ε であり、これらを次のような関数で表されると仮定する。

$$\eta = axz^l \tag{11}$$

$$\psi = bx^m F(\eta) \tag{12}$$

$$c = c_* x^n G(\eta) \tag{13}$$

$$k = dx^p K(\eta) \tag{14}$$

$$\varepsilon = ex^q E(\eta) \tag{15}$$

ここで、 η は相似変数であり、 F 、 G 、 K 、 E は相似関数、 a 、 b 、 c_* 、 d 、 e は後で定められる係数、 l 、 m 、 n 、 p 、 q は後で定められる x のべき数である。

式(11)、(12)を用いて流速 u 、 w を求めると次のようになる。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z} = abx^{m-l} F' \tag{16}$$

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = bx^{m-1}(l\eta F' - mF) \tag{17}$$

式(11)から(17)の関係を用いると、式(2)、(3)、(6)、(7)は順に次のように表される。

$$\begin{aligned} a^2 b^2 x^{2m-2l-1} \{ (m-l)F'^2 - mFF'' \} &= Rg \sin \theta c_* x^n G \\ &- \frac{Rc_*}{a} g \cos \theta \left\{ (n+l) \int_z^b G d\eta + l\eta G \right\} \\ &+ c_n \frac{a^3 b d^2}{e} x^{2p+2m-4l-3l} \\ &\times \left\{ F'' \left(\frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right) + \frac{K^2}{E} F'' \right\} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} abc_* x^{m+n-l-1} (nF'G - mFG') \\ = \frac{c_n a^3 c_* d^2}{\sigma_i e} x^{2p+q+2m-4l} \\ \times \left\{ G' \left(\frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right) + \frac{K^2}{E} G'' \right\} \\ abdx^{m+p-l-1} (pF'K - mFK') \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} = \frac{c_n a^2 d^3}{\sigma_i e} x^{3p-q-2l} \left\{ K'' \left(\frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right) + \frac{K^2}{E} K'' \right\} \\ + c_n \frac{a^4 b^2 d^3}{e} x^{2p-q+2m-4l} \frac{K^2}{E} F''^2 \\ + Rg \cos \theta \frac{c_n a c_* d^2}{\sigma_i e} x^{2p+q+2m-4l} \frac{K^2}{E} G' - ex^q E \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} abex^{m+p-l-1} (qF'E - mFE') \\ = \frac{c_n a^2 d^3}{\sigma_i e} x^{2p-2l} \left\{ E' \left(\frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right) + \frac{K^2}{E} E'' \right\} \\ + c_{11} c_n a^4 b^2 dx^{p+2m-4l} KF''^2 \\ + (1-c_{3c}) Rg \cos \theta \frac{c_n a c_* dx^{n-l} K^2}{\sigma_i E} G' \\ - c_{22} \frac{e^2}{d} x^{2q-p} \frac{E^2}{K} \end{aligned} \tag{21}$$

係数 a 、 b 、 c_* 、 d 、 e 及びべき数 l 、 m 、 n 、 p 、 q を合理的に定めるためには、上式(18)、(19)、(20)、(21)だけでは不十分である。そこで新たな関係式として流下方向に濃度フラックス Q_c の保存式を次のように定める。

$$\begin{aligned} Q_c = \int_0^\infty ucdz = \int_0^\infty abx^{m-l} F' c_* x^n G \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \\ = bc_* x^{m+n} \int_0^\infty F' G d\eta \end{aligned} \tag{22}$$

相似解が存在するためには、 x のべき数がそれぞれの式(18)から(22)において等しくなる必要がある。この条件は次のように書ける。

$$2m-2l-1 = n = n+l-1 = 2p+m-q-3l \tag{23}$$

$$m+n-l-1 = 2p-q+n-2l \tag{24}$$

$$\begin{aligned} m+p-l-1 = 3p-q-2l = 2p-q+2m-4l \\ = 2p-q+n-l = q \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} m+q-l-1 = 2p-2l = p+2m-4l \\ = n-l = 2q-p \end{aligned} \tag{26}$$

$$m+n=0 \tag{27}$$

以上の式(23)、(24)、(25)、(26)、(27)からべき数を定めると次のようになる。

$$l=1 \quad m=1 \quad n=-1 \quad p=0 \quad q=-1 \tag{28}$$

演算を簡略化するため、次のように無次元の渦動粘性係数とその微分を次のように定義する。

$$\nu_{i*} = c_n \frac{K^2}{E} \quad (29)$$

$$\nu'_{i*} = c_n \left(\frac{2KK'}{E} - \frac{K^2 E'}{E^2} \right) \quad (30)$$

ただし以下の演算では下付き添え字 (*) を省略する (このようにしても混乱は少ないものと考えられる)。 x のべき数が求められたので、次に係数 a , b , c_* , d , e を決定する。まず、式 (28) で求められたべき数を式 (18) から (22) に代入して整理すると以下の式を得る。

$$FF'' + \frac{c_*}{a^2 b^2} Rg \cos \theta G - \frac{c_*}{a^2 b^2} Rg \cos \theta \eta G + \frac{ad^2}{be} (\nu'_i F'' + \nu_i F''') = 0 \quad (31)$$

$$F'G + FG' + \frac{1}{\sigma_i} \frac{ad^2}{be} (\nu'_i G' + \nu_i G'') = 0 \quad (32)$$

$$FK' + \frac{1}{\sigma_k} \frac{ad^2}{be} (\nu'_i K' + \nu_i K'') + \frac{a^3 bd}{e} \nu_i F''^2 + \frac{Rg \cos \theta}{\sigma_i} \frac{c_* d}{be} \nu_i G' - \frac{e}{abd} E = 0 \quad (33)$$

$$F'E + FE' + \frac{1}{\sigma_i} \frac{ad^2}{be} (\nu'_i E' + \nu_i E'') + c_{1i} \frac{E}{K} \left\{ \frac{a^3 bd}{e} \nu_i F''^2 + (1 - c_{3i}) \frac{Rg \cos \theta}{\sigma_i} \frac{c_* d}{be} \nu_i G' \right\} - c_{2i} \frac{e}{abd} \frac{E^2}{K} = 0 \quad (34)$$

$$Q_i = bc_* \int_0^\infty F' G d\eta = bc_* I \quad (35)$$

ここで、積分 I は次のように定義される。

$$I = \int_0^\infty F' G d\eta \quad (36)$$

係数 a , b , c_* , d , e を求めるため、式 (31), (32), (33), (34), (35) に含まれるこれらの合成された係数を次のようにおく。このように置いても一般性は失われない。

$$\frac{Rg \sin \theta c_*}{a^2 b^2} = 1 \quad (37)$$

$$\frac{ad^2}{be} = 1 \quad (38)$$

$$\frac{a^3 bd}{e} = 1 \quad (39)$$

$$\frac{e}{abd} = 1 \quad (40)$$

$$\frac{Q_i / I}{bc_*} = 1 \quad (41)$$

これらより a , b , c_* , d , e を求めると次のようになる。

$$a = 1 \quad (42)$$

$$b = (Rg \sin \theta Q_i / I)^{1/3} = U^* \quad (43)$$

$$c_* = \frac{(Q_i / I)^{2/3}}{(Rg \sin \theta)^{1/3}} \quad (44)$$

$$d = (Rg \sin \theta Q_i / I)^{2/3} = U^{*2} \quad (45)$$

$$e = Rg \sin \theta Q_i / I = U^{*3} \quad (46)$$

ここで、 U^* は次のように表される濃度フラックスと重力加速度より定まる特性速度である。

$$U^* = (Rg \sin \theta Q_i / I)^{1/3} \quad (47)$$

残された係数は式 (42) から (46) を用いることにより次のように定められる。

$$\frac{1}{\sigma_i} Rg \cos \theta \frac{c_* d}{be} = \frac{\cot \theta}{\sigma_i} Rg \sin \theta \frac{c_* d}{be} = \frac{\cot \theta}{\sigma_i} \quad (48)$$

$$\frac{Rg \cos \theta c_*}{a^3 b^2} = \cot \theta \quad (49)$$

2.3 相似関数に対する常微分方程式

以上の結果から、相似変数と相似関数の満たすべき連立常微分方程式が求められる。式 (42) から (49) の関係を式 (31), (32), (33), (34) に代入すると相似関数に対する最終的な微分方程式が次のようになる。

$$FF'' + G - \cot \theta \eta G + \nu'_i F'' + \nu_i F''' = 0 \quad (50)$$

$$F'G + FG' + \frac{1}{\sigma_i} (\nu'_i G' + \nu_i G'') = 0 \quad (51)$$

$$FK' + \frac{1}{\sigma_k} (\nu'_i K' + \nu_i K'') + \nu_i F''^2 + \frac{\cot \theta}{\sigma_i} \nu_i G' - E = 0 \quad (52)$$

$$F'E + FE' + \frac{1}{\sigma_i} (\nu'_i E' + \nu_i E'') + c_{1i} \frac{E}{K} \left\{ \nu_i F''^2 + (1 - c_{3i}) \frac{1}{\sigma_i} \cot \theta \nu_i G' \right\} - c_{2i} \frac{E^2}{K} = 0 \quad (53)$$

式 (50), (51), (52), (53) は相似関数 F , G , K , E が満たすべき連立常微分方程式である。次元量と相似変数 η , 相似関数 F , G , K , E の関係は、式 (11) から (15), 式 (28), 式 (42) から (46) の関係を用いることにより次のように表される。

$$\eta = z/x \quad (54)$$

$$\phi = (Rg \sin \theta Q_c / I)^{1/3} x F(\eta) \quad (55)$$

$$u = (Rg \sin \theta Q_c / I)^{1/3} F'(\eta) \quad (56)$$

$$w = (Rg \sin \theta Q_c / I)^{1/3} (\eta F' - F) \quad (57)$$

$$c = \frac{(Q_c / I)^{2/3}}{(Rg \sin \theta)^{1/3}} \frac{1}{x} G(\eta) \quad (58)$$

$$k = (Rg \sin \theta Q_c / I)^{2/3} K(\eta) \quad (59)$$

$$\varepsilon = (Rg \sin \theta Q_c / I) \frac{1}{x} E(\eta) \quad (60)$$

2.4 境界条件

式(50)から(53)に対する境界条件を考える。壁面密度噴流は一方で壁面、他方では自由境界となっている。 u , k , ε に対する壁面の境界条件は乱流モデルで多く用いられている壁関数法²⁾を採用する。また流速の横方向成分は壁面で零になる。壁面において z 方向の濃度フラックスが零となる。壁面からの距離 z_0 が十分に小さいものとするとき、壁面での境界条件を式で書けば次のようになる。

$$\frac{u_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z_0 u_*}{\nu} \right) + As \quad (61)$$

$$w = 0 \quad (62)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{k}{u_*^2} = \frac{1}{\sqrt{c_n}} \quad (64)$$

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z_0} \quad (65)$$

ここで、 κ はカルマン定数であり、 u_* は摩擦速度、 ν は動粘性係数である。無限遠、すなわち $z = \infty$ での境界条件は、全ての量が零になることであり次のように表される。

$$u = k = \varepsilon = c = 0 \quad (66)$$

式(61)から(65)の境界条件を無次元量で表す。大文字の U_0 , U_* を無次元の壁近傍の平均流速、摩擦速度とする。このとき式(61)は次のように書ける。

$$\frac{U_0}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(\eta_0) + A \quad (67)$$

ここで η_0 は無次元の壁からの距離である。壁面が水理的に滑らかであれば係数 A は次のように定義される。

$$A = \frac{1}{\kappa} \ln(Re_* / \eta_{1/2}) + As \quad (68)$$

ここで、 Re_* は次式のように定義される。

$$Re_* = u_* b_{1/2} / \nu \quad (69)$$

ここで、 $b_{1/2}$ は自由流部の流速が最大流速の1/2になる位置を壁面から計った距離であり、以下では流速の半値半幅と呼ぶ、 $\eta_{1/2}$ は流速の半値半幅の無次元表示である。

以上のように壁面傾斜密度噴流の境界条件は、レイノルズ数によって変化する。しかし、式(68)で明らかかなように Re_* は対数関数の中に含まれているので、係数 A の Re_* による変化は小さい。著者^{5),6)}が層流の鉛直壁面密度噴流の解析で明らかにしているように、層流の場合には厳密な相似解を得る。このような観点から見ると乱流の傾斜壁面密度噴流は‘弱い’相似解を持つと考えることができる。しかしながら既に著者が明らかにしたようにこの場合においても境界条件による流速分布形の差は極めて小さい(福嶋³⁾)。

境界条件式(62)から(65)の無次元表示は次のようになる。

$$F = 0 \quad (70)$$

$$G' = 0 \quad (71)$$

$$\frac{K}{U_*^2} = \frac{1}{\sqrt{c_n}} \quad (72)$$

$$E = \frac{U_*^3}{\kappa \eta_0} \quad (73)$$

同様に無限遠の境界条件式(66)は次のように無次元表示で表される。

$$F' = G = K = E = 0 \quad (74)$$

以上のように問題は境界条件式(67)から(74)のもとで、常微分方程式(50)から(53)を解くことに帰着する。これらは非線形常微分方程式であり解析的に解くことはできない。そこで、常微分方程式を有限差分法で離散化し繰り返し法で解を求めた。その際、積分の外縁は試行錯誤的に設定し最終的に流速の半値幅の3倍程度にとった。

3. 相似解の有効性の検討

本章では、2.で求めた傾斜壁面密度噴流の相似解を実測値と比較し、その有効性を検討する。

Fig. 2に比較に用いた実験装置の概要を示す。実験装置は長さ180cm、高さ100cm、幅8.5cmの亚克力製水槽に、角度 $\theta = 30^\circ$ の亚克力製の傾斜版を取り付け

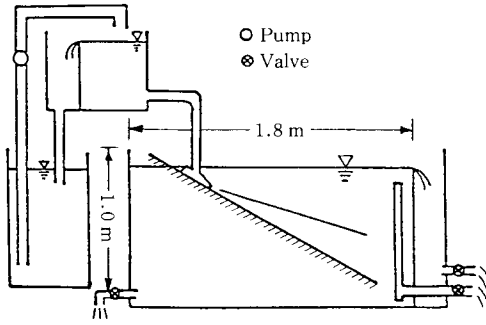


Fig. 2 Experimental apparatus.

たものである。実験は次のように行った。水槽に淡水（水道水）を満し、高さ4 cmのスロットから所定の濃度に調節した塩水を静かに流入させた。流速分布は、二成分レーザードップラー流速計を用い、一点についてサンプリング間隔0.05sとし測定時間を100sとした。このため、主な乱流特性量であるレイノルズ応力、乱れ運動エネルギーの直接測定が可能になった。塩分濃度分布の測定は、サイフォンで取水した塩水を導電率計により測定した。実験条件は、スロットの流出口での流速が $U = 16.7 \text{ cm/s}$ 、相対密度差 $Rc = 0.0102$ とし、レイノルズ数 $Re = 6660$ とした。なお、座標系はスロット出口から斜面方向に x 座標を、これと直角上向きに z 座標をとった。

Fig. 3から8に実測値と相似解を比較したものを示す。図中では実測値を○ ($x = 30 \text{ cm}$)、△ ($x = 35 \text{ cm}$)で、理論値を実線で示している。Fig. 3から順に、平均流速分布 (Fig. 3)、平均濃度分布 (Fig. 4)、レイノルズ応力 (Fig. 5)、乱れ運動エネルギー (Fig. 6)、分子粘性逸散率 (Fig. 7)、渦動粘性係数 (Fig. 8) である。これらはいずれも相似変数である式 (56) から (60) の関係式に基づき無次元化したものである。

流速分布 (Fig. 3) を見ると、最大流速付近で実測値は理論値より小さいがそれ以外では良好な一致を見ることができる。塩分濃度分布 (Fig. 4) では底面付近で両者は良く一致しているが、プルームの外縁に向かうに従って実測値が理論値よりもやや大きくなる傾向にある。この理由として考えられるのは、濃度の小さい塩水が下流端で反射した影響の可能性がある。レイノルズ応力分布 (Fig. 5)、乱れ運動エネルギー (Fig. 6) の分布では理論値は実測値を良く説明している。これらに対し、分子粘性逸散率 ϵ (Fig. 7) は特に壁付近で実測値は理論値に比べてかなり小さい。

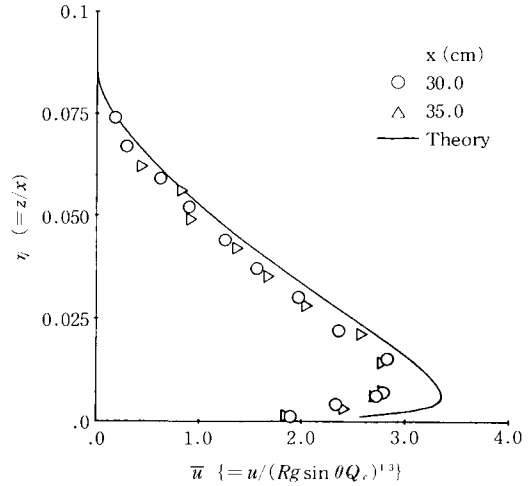


Fig. 3 Comparison of non-dimensional velocity profiles ($\theta = 30^\circ$). ○ denotes the results of $x = 30 \text{ cm}$, and △ denotes those of $x = 35 \text{ cm}$. The solid line indicates the theoretical line based on the similarity solution. For Fig. 4 to Fig. 8, the experimental condition and the symbols are the same as those of Fig. 3.

ϵ の値は、流速の測定値のパワースペクトルを求め、慣性小領域の $-5/3$ 乗則が成立すると考えて求めている。特に壁面付近においてパワースペクトルは大きくばらついており、 $-5/3$ 乗則に従う範囲は小さかった。このことが ϵ に関して大きな誤差を生じた理由である。渦動粘性係数 ν_t (Fig. 8) は、レイノルズ応力と平均流速勾配を用いて式 (4) から求めたものである。実測の流速勾配 ($\partial u / \partial z$) は誤差がかなりあるので、これより求めた ν_t には結果として多くの誤差を含むことになる。

4. CGIによる種々の流れ場の表示

3.章で示されたように、2.節で得られた相似解は実測値に対し良い説明を与える。そこで、本節では傾斜壁面密度噴流の相似解をもとにして、コンピュータグラフィックス (CG) を用いて種々の方法によって流れ場を表現する。CGによって得られた流れ場の比較を行い、その長所、短所を考察する。

4.1 流れ場の表示法の検討

ここでは、流れ場の一般的な表示法を検討するため

に、まず流れ関数と流速の無次元化を行う。さらに、CGを用いた、流線、流速ベクトル、タイムライン、流体粒子の軌跡などの表示法を示す。

式 (55), (56), (57) を簡単化すると流れ関数 ψ , 流速 u , w は有次元の形で次のように表される。

$$u = U^*F'(\eta) = U^*\bar{u} \quad (75)$$

$$w = U^*(\eta F'(\eta) - F(\eta)) = U^*\bar{w} \quad (76)$$

$$\psi = U^*x F(\eta) \quad (77)$$

ここで、 U^* は式 (47) で表される特性速度、 \bar{u} , \bar{w} はそれぞれ、 u , w に対応する無次元速度である。流れ関数を無次元化するため $x = x_0$ での流れ関数の値 ψ_0 は次のように表される。

$$\psi_0 = U^*x_0 F_0 \quad (78)$$

ここで、 x_0 は仮想原点から基準位置までの距離である、この ψ_0 を用いて流れ関数 ψ を次のように無次元化する。

$$\phi = \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{x F(\eta)}{x_0 F_0} = \xi \frac{F}{F_0} \quad (79)$$

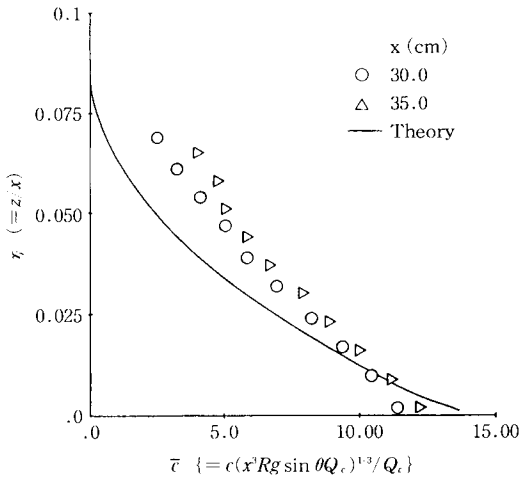


Fig. 4 Comparison of the concentration profile.

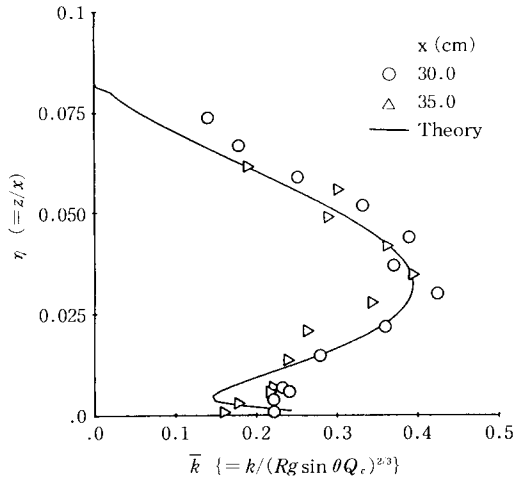


Fig. 6 Comparison of the non-dimensional kinetic energy of turbulence.

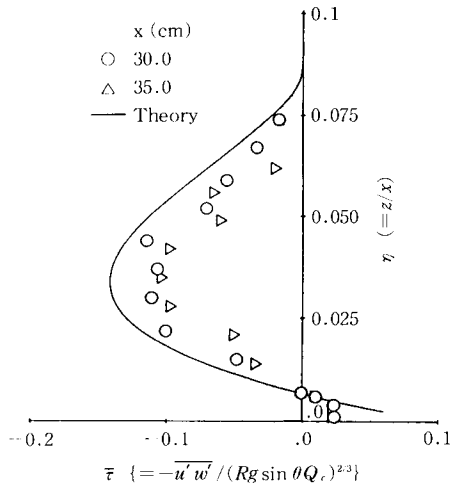


Fig. 5 Comparison of the non-dimensional Reynolds stress.

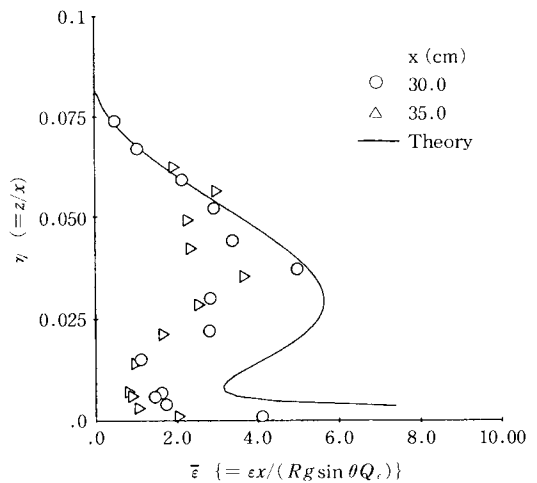


Fig. 7 Comparison of the non-dimensional molecular dissipation rate of turbulence.

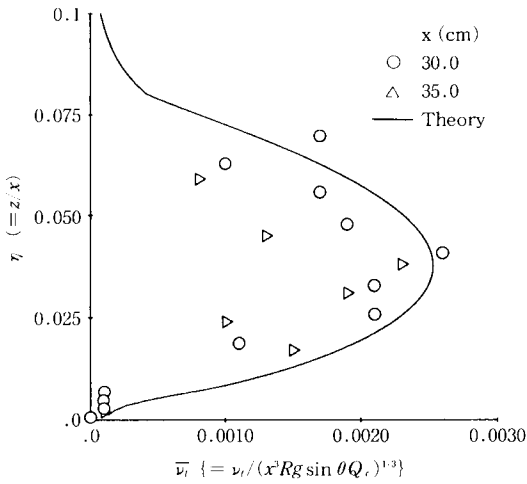


Fig. 8 Comparison of the non-dimensional eddy viscosity.

ここで、 $\xi = x/x_0$ 、 $\phi = \psi/\psi_0$ はそれぞれ x 方向の無次元距離、無次元流れ関数である。

流線の満たす方程式は次のようになる。

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\bar{w}}{\bar{u}} \quad \text{或いは} \quad \phi(\xi, \zeta) = \text{const.} \quad (80)$$

ここで、 $\zeta = (z/x_0)$ は z 方向の無次元距離である。速度ベクトルは無次元流速の各成分 \bar{u} 、 \bar{w} のベクトルから次のように求められる。

$$(\xi_2 - \xi_1, \zeta_2 - \zeta_1) = (\bar{u}, \bar{w}) \quad (81)$$

ここで、 (ξ_1, ζ_1) は速度ベクトルの出発点の座標、 (ξ_2, ζ_2) は速度ベクトルの終点の座標である。

流体粒子の軌跡は次の微分方程式を積分することによって求めることができる。

$$\frac{d\xi}{d\bar{t}} = \bar{u} \quad \frac{d\zeta}{d\bar{t}} = \bar{w} \quad (82)$$

ここで、 \bar{t} は無次元時間であり、次のように定義する。

$$\bar{t} = \frac{\xi}{U^*} \quad (83)$$

タイムラインは式 (82) で求めた流体粒子の軌跡をある時間間隔で横方向に連ねた線として求められる。

数値計算で得られた諸量は格子点について求められているので、任意位置での値は補間によって定める必要がある。ここでは流れをコンピュータによる実時間で表示するというを目的としているため、最も単純な補間法である線形補間を用いた。座標 (ζ_1, ζ_2) の間の座標 ζ_0 での値 f_0 を (ζ_1, ζ_2) での値 (f_1, f_2) により次のように求める。

$\zeta_1 < \zeta_0 < \zeta_2$ に対して

$$f_0 = f_1 + \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} (f_2 - f_1) \quad (84)$$

4.2 CGによる流れ場の表示

本章では5.1に示した手法により、コンピュータグラフィックス(CG)を用いて傾斜壁面密度噴流の流れ場の表現方法の比較を行い、その長所、短所を考察する。

Fig. 9は縦軸に $\zeta (= z/x_0)$ 、横軸に $\xi (= x/x_0)$ をとった領域における無次元流速分布(実線)と濃度分布(破線)を表示したものである。この図では ζ 方向の座標は ξ 方向の2倍にとっていることに留意され

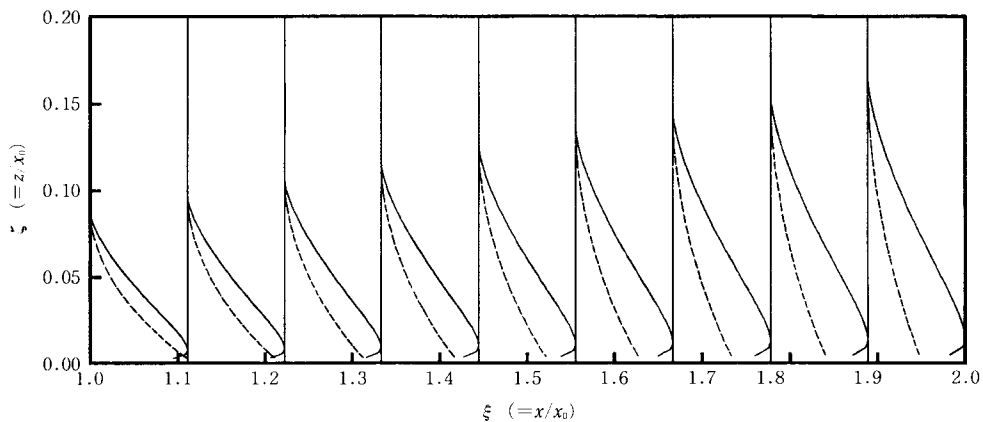


Fig. 9 Variations of velocity and concentration profiles in the flow distance.

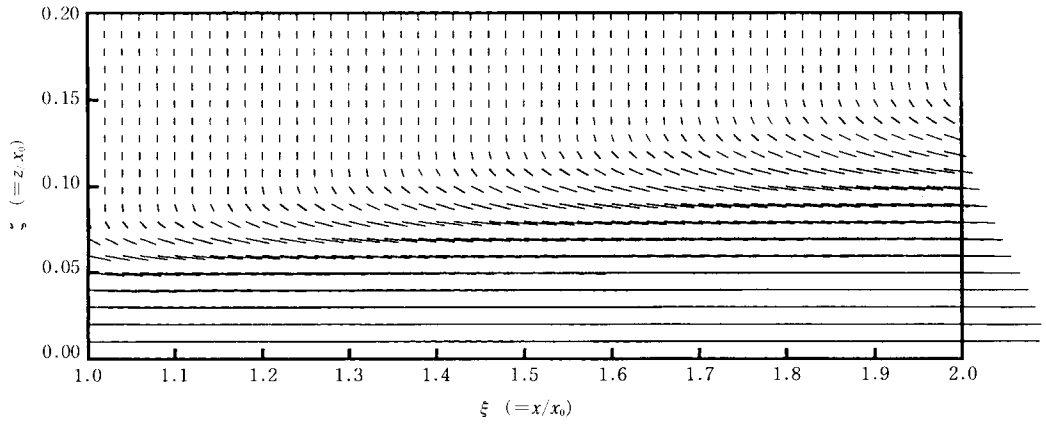


Fig.10 Non-dimensional velocity vectors.

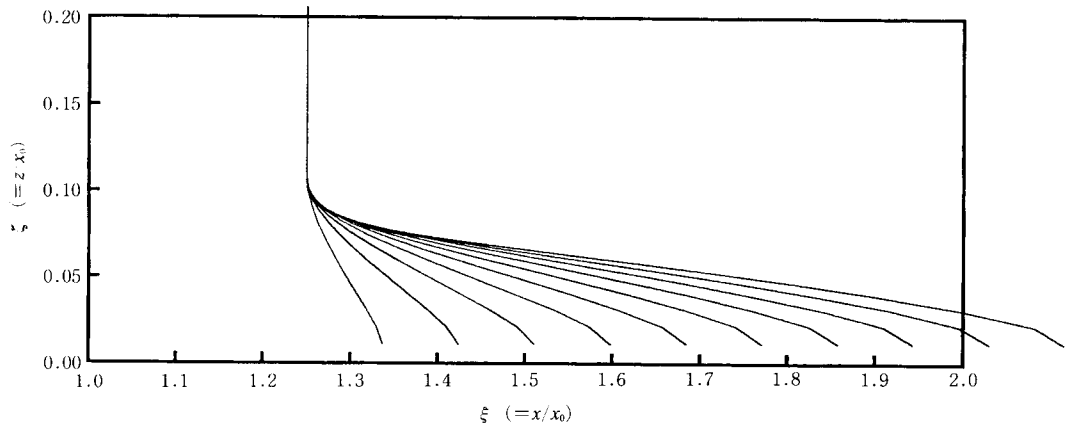


Fig.11 Non-dimensional time lines of fluid particales.

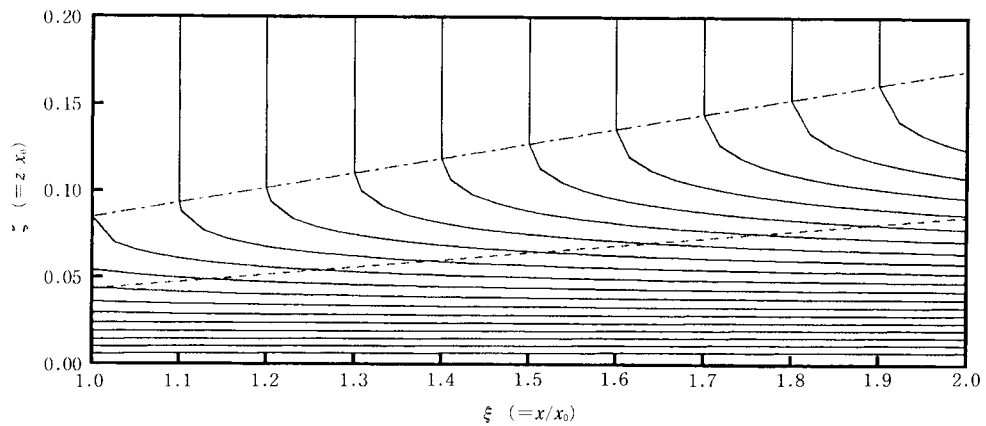


Fig.12 Non-dimensional streamlines.

たい。相似解は傾斜壁面密度噴流の確立領域について得られたものであるため、最大流速は流下方向に一定である。一方、式(54)に示すように、噴流幅は流下距離 ξ の増加とともに直線的に増加する。濃度は式(58)に示すように x に反比例して減少するので $\xi=1$ で $\bar{v}=1.0$ であったものが $\xi=2$ では $\bar{v}=0.5$ になっている。

Fig. 10はFig. 9と同じ領域内での流速ベクトルを表示したものである。この図より、噴流本体の流れはほぼ ξ 方向に流れているのに対し、噴流の上部では下向きの流速ベクトルが現れている。これは噴流本体の連行が生じているためであり、この部分の流れが $\bar{u}=0$ であるのに対し、 ξ 方向の流速 \bar{w} が有限の値を持っている為である。噴流の上部の流速 \bar{w} は連行速度と等しい。

Fig. 11はFig. 9と同じ領域でのタイムラインを示したものである。タイムラインは $\xi=1.25$ の位置を始点として流体粒子の軌跡を求め、縦方向に曲線で結んだものである。 $\xi > 0.1$ の範囲は u が零であるのでタイムラインは動かない。 $0 < \xi < 0.1$ では流速のタイムラインは流下方向に徐々に伝搬して行くのが分かる。

Fig. 12はFig. 9と同じ領域での流線を描いたものである。図中実線が流線、破線が流速の半値幅、一点鎖線が噴流の外縁を示したものである。この図より、噴流の幅が流下方向に線形に増加して行くこと、噴流の外領域で連行に伴う流れが存在することなどが分かる。主流域の流線の間隔は等間隔であり、流速が一定になっていることが分かる。

Fig. 13は流体粒子の軌跡の時間変化を示したものである。この図では ξ 軸の縮尺は ξ 軸と等しくとっている。流体粒子の軌跡は、式(82)を用いて時間間隔を $\Delta t=0.1$ として積分して求めたものである。図中の実線は $t=(n-1)\Delta t$ での軌跡の位置と $t=n\Delta t$ の軌跡の位置を結んだものであり、実線の長さは流速ベクトルを表している。これらの図では $t=20\Delta t$ までは $2\Delta t$ 間隔で、それ以降は $4\Delta t$ 間隔で描いている。 $t=12\Delta t$ までは噴流の主流部分の軌跡が時間と共に下流端にまで到達している。軌跡が下流端に到達するとその時点で再び上流からの軌跡を描いている。噴流の上部を見てみると、主流によって連行される ξ 方向の流速成分 \bar{w} があるため、僅かずつ下向きに流体粒子が運動して行く様子が分かる。この軌跡は $32\Delta t$ から $36\Delta t$ になると主流に巻き込まれる。

4.3 考察

前節4.2でCGによる様々な流れ場の表示を試みた。それぞれの手法には長所と短所がある。流速分布、濃度分布は基本的な流れ場の表示法であり、特に実験結

果との比較を行うことに適している。しかし、この方法はある断面での流速あるいは濃度の分布を示すものであり、描かれた曲線が何であるのか専門家以外にはわかりにくい。流速ベクトル図は全体の領域での流速、流向を表しているので、主流と外縁での流れの違いを把握するには適した方法であろう。流速のタイムラインは主流部の流体粒子の移動状況の時間変化を見るのに適しているが、噴流の外縁部については何も情報を与えない欠点を有している。流線図は流れの全領域を表示するため、噴流の主流及び外縁部の流動の状況を見ることができる。ただし、流線概念は流体力学の基礎知識を必要とするので、描かれた流線が何を意味しているのか分かりにくい欠点がある。

これに対して、流体粒子の軌跡の時間変化を示したFig. 13は浮子を水流に浮かべその運動を見るという実験と類似の表現であり、専門家以外にも分かりやすい長所を有する。特に今回開発したプログラムではTurbo Pascalを用いており、軌跡の時間変化をパソコンのCRT上で高速に再現することができる。このことより、流体粒子の軌跡の時間変化を画面上で見えることは他の流れ場の表示方法に比べて優れていると言える。一方、この方法の欠点は、パソコン等の機器を必要とすること、多くの画面データを紙面で表示することができないこと等が挙げられる。

5. おわりに

$k-\epsilon$ 乱流モデルを用いて傾斜壁面密度噴流の相似解を求めた。得られた理論解を傾斜角 $\theta=30^\circ$ に設定した実験結果と比較を行い、平均流速分布、平均濃度分布などの平均量とともに、乱れ運動エネルギー、レイノルズ応力などの乱れ特性量についても十分な精度で説明できることを示した。

次に、傾斜壁面密度噴流の相似解を用いて、コンピュータグラフィックス(CG)によって種々の流れ場の表示方法について検討した。すなわち、流速分布と濃度分布の流下距離変化、流速ベクトル図、流速のタイムライン、流線図、流体粒子の軌跡の時間変化である。これらの結果より、実験値との比較を行うためには流速分布、濃度分布が有力な方法であること、流れを動的に表す方法として流体粒子の軌跡の時間変化の表示が適切であることを示した。

最後に、本研究を行うにあたり、文部省科学研究費試験研究(B)(研究代表者、大阪大学、中辻啓二助教授、課題番号05555146)の補助を受けた。ここに記して深甚なる感謝の意を表します。

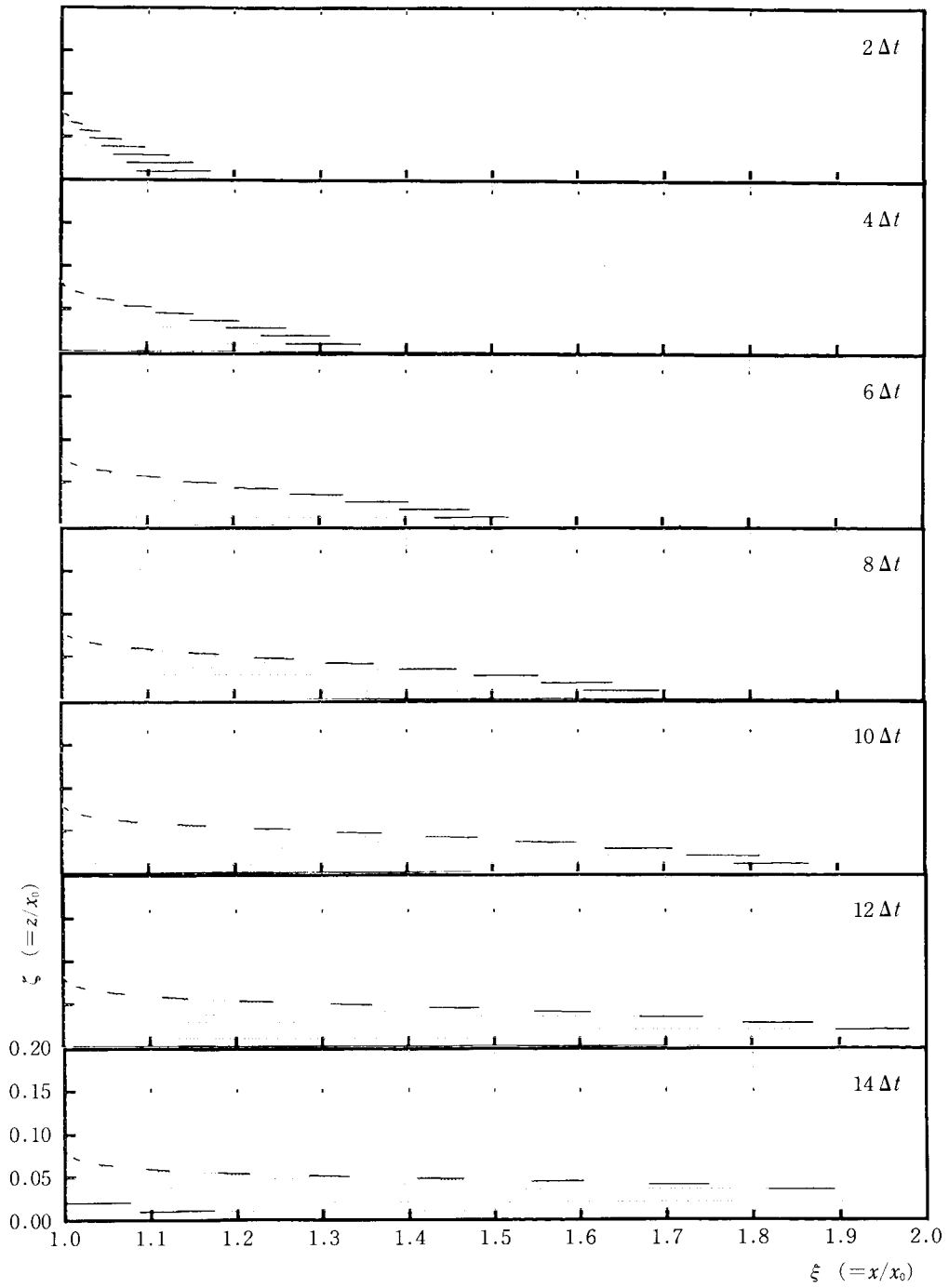


Fig.13 Time variations of fluid particle path lines (No. 1).

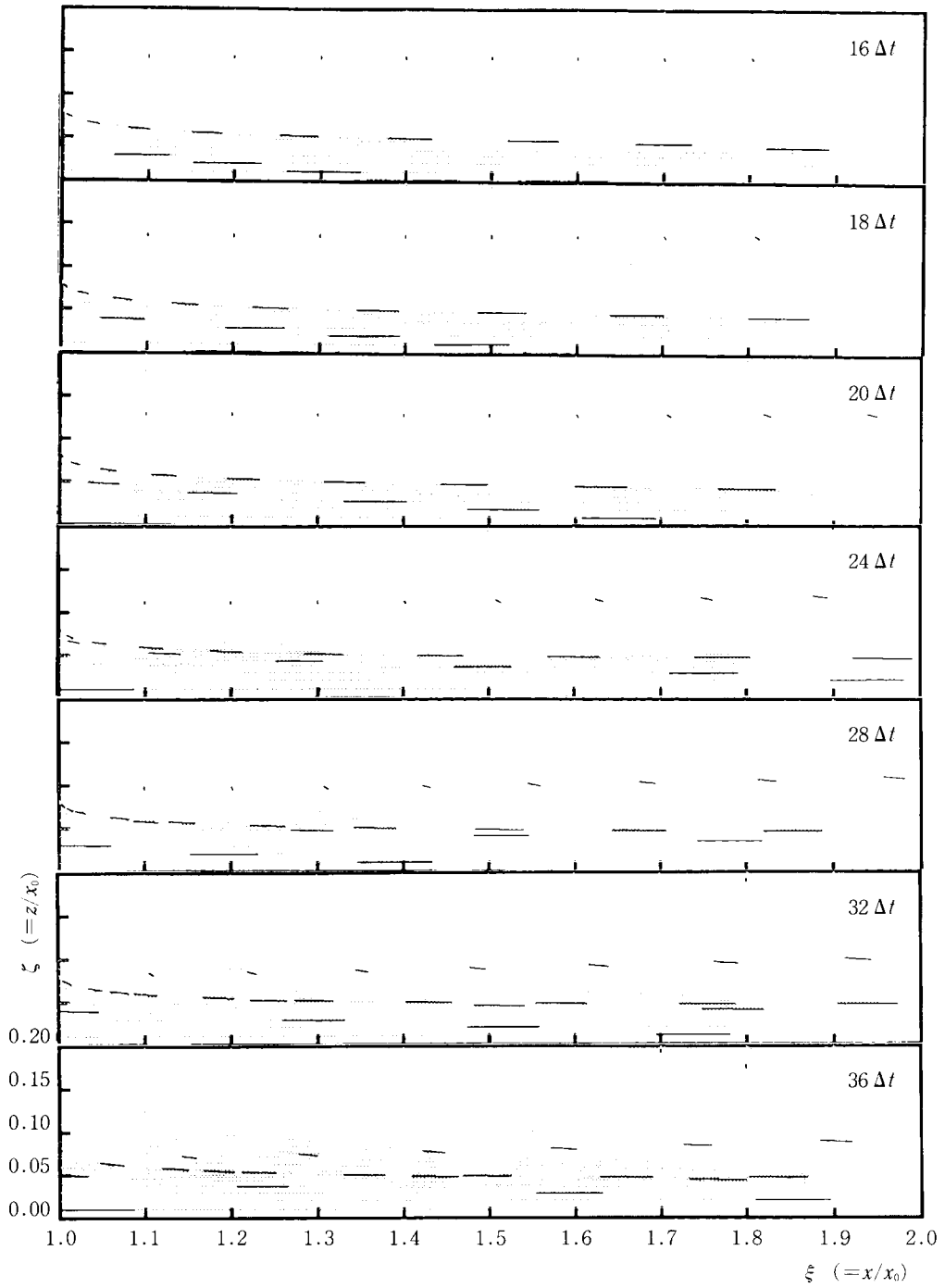


Fig.14 Time variation of fluid particle path lines (No. 2).

参考文献

- 1) Schlichting, H.: *Boundary Layer Theory*, 7th Ed., McGRAW-HILL, pp.745-747, 1979.
- 2) Rodi, W.: Turbulent models and their application, *State of the Arts Paper, IAHR*, 1980.
- 3) 福嶋祐介：乱流モデルによる傾斜壁面密度噴流の解析，土木学会論文集，第399号/II 10, pp.65-74, 1988.
- 4) 福嶋祐介，高島哲雄：二次元傾斜壁面密度噴流の乱流測定について，土木学会論文集，第411号/II-12, pp.259-262, 1989.
- 5) 福嶋祐介：鉛直壁面密度噴流の流速分布と密度分布の層流解，第37回年次学術講演会講演概要集，土木学会，第2部，pp.188-189, 1982.
- 6) 福嶋祐介，早川典生，福永和久：鉛直壁面密度噴流に関する研究，長岡技術科学大学研究報告，No. 5, pp.53-59, 1983.