

固体粒子を浮遊する非ブーシネスク流の $k-\epsilon$ 乱流モデルによる数値解析手法の提案

福嶋 祐介*

Numerical Analysis on Non-Boussinesq Suspension Flow Using $k-\epsilon$ Turbulence Model

Yusuke FUKUSHIMA

The some analysis on the suspension flow with solid particles cannot use the Boussinesq approximation for the case that the density of solid particles is appreciably larger than the density of ambient fluid. The new formulation for the solid-fluid two-phase flow, which is treated as the non-Boussinesq fluid, is presented. The basic equations consist of the continuity equation, the mass conservative equation for the solid phase, the Reynolds equation, the equation of the kinetic energy of turbulence and the equation of the viscous dissipation rate. The additional terms caused by the effects of suspended solid particles are included in these equations. The open channel suspension flow is calculated using these basic equations as a simple example of solid particle suspension flow.

Key words: solid-fluid two phase flow, suspension flow, non-Boussinesq approximation, numerical analysis, $k-\epsilon$ turbulence model.

1. 序 論

固体粒子の浮遊を伴う流体现象は、自然界において数多く観察される。例えば、河川における浮遊土砂の輸送、海底や大規模な湖で発生する泥水流、厳冬期山岳地帯で発生する表層乾雪雪崩、火山活動に伴う火砕流などの諸現象である。浮遊土砂は、底面に堆積していた土砂が水流の乱れによって巻き上げられ浮遊状態で下流に輸送される流れである。表層乾雪雪崩は、空気流の乱れが斜面上の雪層を洗掘し浮遊された雪粒子が自身の重さのため流下方向に加速することによって生ずる。この様な雪崩は煙型雪崩と呼ばれている。火砕流もまた火山灰の細粒成分が浮遊して流れ、さらに加速し大規模な流れとなることがその特徴である。

このうち、泥水流、煙型雪崩や火砕流では、流体と固体粒子の混合物が自身の密度差により流下方向に加速あるいは減速する現象である。このような流れと類似した流れに、溶解性の物質の濃度差に起因する密度差によって駆動される密度流がある。密度流もまた、自然界や実験室で数多く見いだされる。一般に塩分濃度や温度差が主因となる密度流では、密度差が一樣流体の密度に比べてごく小さい場合が多い。このような流れは運動方程式の重力項と圧力項でのみ密度差を考慮し、他の加速度項、粘性項では密度が一定であるとするブーシネスク近似が採用されることが多い。実際、この近似は、ほとんどの密度流や流体が水の場合の固

液混相流である泥水流や浮遊砂流において有効である。

一方、作業流体が空気などの気体の場合には、固体粒子の密度が気体の密度に比べて非常に大きいため、固気混相流体の密度が気体の密度に比べて同じかそれとも大きくなる場合が一般的である。このような場合には、混相流体の密度が場所によって大きく変化するため、ブーシネスク近似は成立せず、運動方程式のすべての項において場所ごとの密度変化を考慮した解析を行う必要がある。ここではこのような流体を非ブーシネスク流体と呼ぶことにする。

雪崩や吹雪などを想定し、固体粒子が雪粒子、作業流体が空気の場合を考える。雪粒子の密度が純水の密度 ρ_s で代表させるとき、 ρ_s は空気密度 ρ_a の約710倍の大きさとなる。したがって、雪粒子の濃度分布を拡散方程式で解くことを念頭に置き、雪粒子の体積濃度は最大で約10%と評価する。この場合でも混合流体の密度は空気の密度の約70倍となり、ブーシネスク近似を採用することは不適當である。

本研究の目的は以下の通りである。一般に固体粒子を浮遊する流れでは、その乱流構造が均一流体の乱流構造と比べ大きく変化することが予想される。このような流れを合理的に解析するためには混合流の乱流構造の適切なモデル化が必要である。均一流体に対しては、 $k-\epsilon$ 乱流モデルなどの二方程式モデルが広く用いられている。このため、混合流体の密度が時間的・空間的に大きく変化する流れに対して、レイノルズ方程式、レイノルズ応力の方程式、乱れ運動エネルギーの式を導く。さらに、均一流体における k 方程式と分子粘性逸散率(ϵ)の方程式の関係の類推から、非ブー

原稿受付：平成9年5月23日

*長岡技術科学大学環境・建設系

シネスク流体に対する ε 方程式を新たに導く。

このようにして得られた非ブーシネスク流体に対する基礎方程式は連続式、固相の質量保存式、レイノルズ方程式、乱れ運動エネルギーの方程式、分子粘性逸散率の方程式である。この基礎方程式系は当然のことながらブーシネスク流体に対しても適用可能である。これらを開水路の浮遊砂流、吹雪に対し適用するため、もっとも単純な条件である定常、等流の仮定のもとで基礎方程式を書き直した。数値計算を適切に行うため、定常・等流に対する基礎方程式、境界条件を無次元化した。得られた無次元の基礎方程式を差分法により離散化し、リラクゼーション法により数値解を求める。開水路の浮遊砂流における流速分布、濃度分布の実測結果と比較し、数値解の妥当性を検討する。

2. 基礎方程式

固体粒子が流体によって浮遊している場合を考える。固体粒子の密度 ρ_s が、流体の密度 ρ_a に比べてきわめて大きいを考える。固体と流体の混相の密度 $\hat{\rho}$ は、固体粒子の体積濃度を \hat{c} とするとき、次式で与えられる。

$$\hat{\rho} = \rho_a + (\rho_s - \rho_a)\hat{c} = \rho_a(1 + R\hat{c}) \quad (1)$$

ここで、 $R = (\rho_s - \rho_a) / \rho_a$ は固体粒子の流体中での有効比重であり、 $R\hat{c}$ が流体に対する相対密度差となる。

固体と流体との二相流が傾斜角 θ の斜面上を流下する場合を考える。斜面に沿った座標系 x_i ($i = 1, 2, 3$) を考える。ここで、 x_1 を斜面方向の座標、 x_2 を水平方向、 x_3 を斜面と直交方向上向きにとる。これらに対応する流速成分を \hat{u}_i とする。流れの場に作用する外力は重力であり、重力加速度を g とする。静止した流体中での固体粒子の沈降速度を w_s 、その x_i 方向成分を w_{sj} とする。流れが十分発達した乱流であり、流速成分 \hat{u}_i 、固体粒子の体積濃度 \hat{c} 、圧力 \hat{p} がそれぞれ平均値と変動量に分けられるものとする。すなわち、

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= u_i + u'_i \\ \hat{c} &= c + c' \\ \hat{p} &= p + p' \end{aligned}$$

である。ここで、 u_i が平均流速成分、 u'_i が変動流速成分、 c が平均濃度、 c' が変動濃度、 p が平均圧力、 p' が変動圧力である。体積濃度の変動に伴って混相の密度 $\hat{\rho}$ も変化し、平均密度を ρ 、密度の変動成分を ρ' とする。これらと濃度との関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \rho + \rho' \\ \rho &= \rho_a(1 + Rc) \\ \rho' &= \rho_a Rc' \end{aligned}$$

このとき、平均流の連続方程式、混相流の質量保存式、固相の質量保存式、レイノルズ方程式、レイノルズ応力の方程式、乱れ運動エネルギーの方程式は次のようになる。

(1) 連続方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = w_s \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (2)$$

(2) 混相流の質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = \rho_s w_{sj} \frac{\partial c}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho' u'_j} \quad (3)$$

(3) 固相の質量保存則

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} c u_j = w_{sj} \frac{\partial c}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{c' u'_j} \quad (4)$$

(4) レイノルズ方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho' u'_j} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'_i} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u'_i u'_j} + \overline{\rho' u'_i u_j} + \overline{\rho' u'_j u_i} + \overline{\rho' u'_i u'_j}) \\ = \rho_s w_{sj} u'_i \frac{\partial c'}{\partial x_j} + \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ + \mu w_{sk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

(5) レイノルズ応力の方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j} + \overline{\rho' u'_k} \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_j \\ + (2u_i u_j - \overline{u'_i u'_j}) \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho' u'_k} + \overline{\rho' u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{\rho' u'_i} \frac{\partial u_j}{\partial t} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'_i u'_j} + (\overline{\rho u'_j u'_k} + \overline{\rho' u'_j u_k} + \overline{\rho' u'_j u'_k}) \frac{\partial u_i}{\partial u_k} \\ + (\overline{\rho u'_i u'_k} + \overline{\rho' u'_i u_k} + \overline{\rho' u'_i u'_k}) \frac{\partial u_j}{\partial u_k} \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{\rho' u'_i u'_j u_k} + \overline{\rho' u'_i u'_j u'_k}) \\ = \rho_s w_{sk} u'_i u'_j \frac{\partial c'}{\partial x_k} + g_i \overline{\rho' u'_j} + g_j \overline{\rho' u'_i} \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u'_j} \delta_{ik} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk}) + p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \overline{u'_i u'_j} - 2 \mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} \\
 & + \mu w_{sk} \left\{ \overline{u'_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c'}{\partial x_i} \right) + \overline{u'_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c'}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

(6) 乱れ運動エネルギーの方程式

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \rho \overline{u'_k} \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_i + (u_i u_i - k) \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho' u'_k} \\
 & + \overline{\rho' u'_i} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'_i u'_i} + (\overline{\rho' u'_i u'_k} + \overline{\rho' u'_i} u_k + \\
 & \overline{\rho' u'_i u'_k}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \rho \overline{u'_i u'_i u'_k} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u'_i u'_i} u_k + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \overline{\rho' u'_i u'_i u'_k} + \overline{\rho' u'_k} \right) = \frac{1}{2} \rho_s w_{sk} \overline{u'_i u'_i} \frac{\partial c'}{\partial x_k} + g_i \overline{\rho' u'_i} \\
 & + \overline{\rho' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k} - \rho \varepsilon + \mu w_{sk} u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

ここで、 t は時間、 $k (= \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i})$ は乱れ運動エネルギー、 ε は分子粘性逸散率、 μ は粘性係数である。混相流が非ブーシネスク流体であるとしたことにより、レイノルズ方程式、レイノルズ応力の方程式、乱れ運動エネルギーの式において、密度変動 ρ' と速度変動 u'_i の高次相関項が数多く含まれていることが特徴である。

空間座標 x_i 、流速の平均成分 u_i 、その変動成分 u'_i を次のように表す。

$$x_i = (x, y, z) \quad u_i = (u, v, w) \quad u'_i = (u', v', w') \quad (8)$$

また、沈降速度の x_i 方向成分 w_{si} は次のようになる。

$$w_{si} = (-w_s \sin \theta, 0, w_s \cos \theta) \quad (9)$$

重力加速度の x_i 方向成分 g_i は次のようになる。

$$g_i = (g \sin \theta, 0, -g \cos \theta) \quad (10)$$

このとき、式(2)から式(7)は以下のように書き換えられる。

(1) 連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -w_s \sin \theta \frac{\partial c}{\partial x} + w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} \quad (11)$$

(2) 混相の質量保存式

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = -\rho_s w_s \sin \theta \frac{\partial c}{\partial x} \\
 & + \rho_s w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \quad (12)
 \end{aligned}$$

(3) 固相の質量保存式

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} c u + \frac{\partial}{\partial y} c v + \frac{\partial}{\partial z} c w = -w_s \sin \theta \frac{\partial c}{\partial x} \\
 & + w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{c' u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{c' v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c' w'} \quad (13)
 \end{aligned}$$

(4) x 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} \\
 & - u \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho u'^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho u' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u' w'} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u' u} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' u' v} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u' u} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v' u} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w' u} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u'^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' u' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w'} \\
 & = -\rho_s w_s \sin \theta u' \frac{\partial c'}{\partial x} + \rho_s w_s \cos \theta u' \frac{\partial c'}{\partial z} + \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 & - \mu w_s \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) + \mu w_s \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (14)
 \end{aligned}$$

(5) y 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} \\
 & - v \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' v'} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho u' v'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho v'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho v' w'} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' v' u} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v' v} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' v' w} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u' v} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v' v} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w' v} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u' v'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' v' w'} \\
 & = -\rho_s w_s \sin \theta v' \frac{\partial c'}{\partial y} + \rho_s w_s \cos \theta v' \frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} \\
 & + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
 & - \mu w_s \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) + \mu w_s \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (15)
 \end{aligned}$$

(6) z 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} \\
 & - w \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' w'} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho u' w'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho v' w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho w'^2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' w' u} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' w' v} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w' w} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u' w} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v' w} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w' w} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u' w'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v' w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'^2} \\
 & = -\rho_s w_s \sin \theta w' \frac{\partial c'}{\partial x} + \rho_s w_s \cos \theta w' \frac{\partial c'}{\partial z} - \rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} \\
 & + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\
 & - \mu w_s \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) + \mu w_s \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (16)
 \end{aligned}$$

(7) 乱れエネルギー k の方程式

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} + \rho w \frac{\partial k}{\partial z} \\
 & + \frac{1}{2} \overline{\rho' u'} \frac{\partial}{\partial x} u u_i + \frac{1}{2} \overline{\rho' v'} \frac{\partial}{\partial y} u u_i + \frac{1}{2} \overline{\rho' w'} \frac{\partial}{\partial z} u u_i \\
 & + (u u_i - k) \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \right) + \overline{\rho' u'} \frac{\partial u}{\partial t} \\
 & + \overline{\rho' v'} \frac{\partial v}{\partial t} + \overline{\rho' w'} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' u'^2} + \overline{\rho' v'^2} + \overline{\rho' w'^2}) \\
 & + \frac{\partial u}{\partial x} (\overline{\rho u'^2} + \overline{\rho' u' u} + \overline{\rho' u'^2}) + \frac{\partial u}{\partial y} (\overline{\rho u' v'} + \overline{\rho' u' v} + \overline{\rho' u' v'}) \\
 & + \frac{\partial u}{\partial z} (\overline{\rho u' w'} + \overline{\rho' u' w} + \overline{\rho' u' w'}) + \frac{\partial v}{\partial x} (\overline{\rho u' v'} + \overline{\rho' v' u} + \overline{\rho' u' v'}) \\
 & + \frac{\partial v}{\partial y} (\overline{\rho v'^2} + \overline{\rho' v' v} + \overline{\rho' v'^2}) + \frac{\partial v}{\partial z} (\overline{\rho v' w'} + \overline{\rho' v' w} + \overline{\rho' v' w'}) \\
 & + \frac{\partial w}{\partial x} (\overline{\rho u' w'} + \overline{\rho' w' u} + \overline{\rho' u' w'}) \\
 & + \frac{\partial w}{\partial y} (\overline{\rho v' w'} + \overline{\rho' w' v} + \overline{\rho' v' w'}) \\
 & + \frac{\partial w}{\partial z} (\overline{\rho w'^2} + \overline{\rho' w' w} + \overline{\rho' w'^2}) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho u_i u_i u'} + \overline{\rho' u_i u_i u} + \overline{\rho' u_i u_i u'}) + \overline{\rho' u'} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho u_i u_i v'} + \overline{\rho' u_i u_i v} + \overline{\rho' u_i u_i v'}) + \overline{\rho' v'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u_i u_i w'} + \overline{\rho' u_i u_i w} + \overline{\rho' u_i u_i w'}) + \overline{\rho' w'} \\
 & = -\frac{1}{2} \rho_s w_s \sin \theta \overline{u_i u_i} \frac{\partial c'}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho_s w_s \cos \theta \overline{u_i u_i} \frac{\partial c'}{\partial z} \\
 & + g \sin \theta \overline{\rho' u'} - g \cos \theta \overline{\rho' w'} - \rho \varepsilon \\
 & + \overline{\rho' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{\rho' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{\rho' \frac{\partial w'}{\partial z}} + \mu \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} \right) \\
 & - \mu w_s \sin \theta \\
 & \times \left\{ \overline{u' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c'}{\partial x} \right)} + \overline{v' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c'}{\partial y} \right)} + \overline{w' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c'}{\partial z} \right)} \right\} \\
 & - \mu w_s \cos \theta \\
 & \times \left\{ \overline{u' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c'}{\partial x} \right)} + \overline{v' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c'}{\partial y} \right)} + \overline{w' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c'}{\partial z} \right)} \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

以上が密度変動を考慮した固体・流体二相流の基礎方程式の完全な式系である。以下ではこれらの式をもとに、解析対象を具体的に絞り、方程式を簡略化する。対象とする流れ鉛直二次元であり、レイノルズ方程式中で粘性項が他の項に比べて十分小さく無視できると仮定する。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}, \quad w \ll u, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad (18)$$

が成立する場合を考える。このとき式(11)から式(17)は次のようになる。

(1) 連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} \quad (19)$$

(2) 混相の質量保存式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = \rho_s w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \quad (20)$$

(3) 固相の質量保存式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} c u + \frac{\partial}{\partial z} c w = w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c' w'} \quad (21)$$

(4) x 方向のレイノルズ方程式

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho u' w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w' u} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w'} \\
 & = \rho_s w_s \cos \theta u' \frac{\partial c'}{\partial z} + \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (22)
 \end{aligned}$$

(5) z 方向のレイノルズ方程式

$$-\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

(6) 乱れエネルギーの方程式

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho w \frac{\partial k}{\partial z} + \frac{1}{2} \overline{\rho' w'} \frac{\partial}{\partial z} u u_i \\
 & + (u u_i - k) \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} + \overline{\rho' u'} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' u'^2} + \overline{\rho' u'^2} + \overline{\rho' w'^2}) \\
 & + \frac{\partial u}{\partial z} (\overline{\rho u' w'} + \overline{\rho' u' w} + \overline{\rho' u' w'}) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u' u' w'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \overline{\rho' u' w'} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \rho_s w_s \cos \theta u' u' \frac{\partial c'}{\partial z} + g \sin \theta \overline{\rho' u'} - g \cos \theta \overline{\rho' w'} \\
 & - \overline{\rho' \frac{\partial u'}{\partial z}} + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} - \rho \epsilon + \mu w_s \cos \theta w' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c'}{\partial z} \right) \quad (24)
 \end{aligned}$$

3. 固体粒子の質量保存式に対する境界条件

固体粒子濃度に対する境界条件を明確にするため、式(21)を流れと直角方向に積分し、層積分方程式を導く。積分を $z = z_0$ (底面近傍) から $z = z_1$ (境界層の外縁) の範囲で行う。

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u}{\partial x} + \frac{\partial c w}{\partial z} - w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{c' w'} \right) dz \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_1} c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} c u dz \\
 & - c_1 \left(\frac{\partial z_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} - w_1 \right) + c_0 \left(\frac{\partial z_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} - w_0 \right) \\
 & - (w_s \cos \theta c_1 - \overline{c' w'}|_{z=z_1}) + (w_s \cos \theta c_0 - \overline{c' w'}|_{z=z_0}) \quad (25)
 \end{aligned}$$

境界層の外縁及び底面付近での連行速度 W_1 , W_0 を次のように定義する。

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} - w_1 = W_1 \quad (26)$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} - w_0 = -W_0 \quad (27)$$

一般に、固定床では式(27)における w_0 , W_0 は零である。一方、固体粒子の濃度が大きく、底面の洗掘、堆積が顕著な場合は w_0 , W_0 は零とはならないことに留意する。同様に連続式(19)の層積分を行うと次式を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} u dz = W_1 + W_0 + w_s \cos \theta (c_1 - c_0) \quad (28)$$

式(25)に式(26), (27)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_1} c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} c u dz = c_0 W_0 + c_1 W_1 \\
 & + (w_s \cos \theta c_1 - \overline{c' w'}|_{z=z_1}) - (w_s \cos \theta c_0 - \overline{c' w'}|_{z=z_0}) \quad (29)
 \end{aligned}$$

以上の検討より、底面と境界層外縁での運動学的境界条件が式(26), (27)で与えられることが分かる。また、固体粒子濃度に対する境界条件は、底面と境界層外縁での濃度フラックスを与えることであり、次式のように表される。

$z = z_0$ で、

$$\overline{c' w'}|_{z=z_0} = w_s \cos \theta E_s \quad (30)$$

$z = z_1$ で、

$$\overline{c' w'}|_{z=z_1} - w_s \cos \theta c_1 = -w_s \cos \theta F_s \quad (31)$$

ここで、 E_s は流れによる固体粒子の底面での連行係数、 F_s は境界層外縁での固体粒子の無次元沈降フラックス (有次元の沈降フラックスは $w_s \cos \theta F_s$ で与えられる) である。

このとき、固体粒子の質量保存式の積分形の式(29)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_1} c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} c u dz = c_0 W_0 + c_1 W_1 \\
 & + w_s \cos \theta F_s + w_s (E_s - c_0 \cos \theta) \quad (32)
 \end{aligned}$$

ここで、底面濃度 c_0 を c_b とした。

4. 圧力分布

x 方向のレイノルズ方程式(22)には圧力 p が含まれている。この項は対象とする流れによって異なる境界条件で定められる。このことを以下に示す。

浮遊流を一般的に考えて、上方から固体粒子の供給 $w_s F_s$ がある場合を考える。このとき、境界層外縁での密度 ρ_1 、任意位置での混相の密度 ρ は次のようになる。

$$\rho_1 = \rho_a + (\rho_s - \rho_a)c_1 = \rho_a(1 + Rc_1) \quad (33)$$

$$\rho = \rho_a + (\rho_s - \rho_a)c = \rho_a(1 + Rc) \quad (34)$$

z 方向のレイノルズ方程式(23)に式(34)を代入して積分すると次式を得る。

$$p = \rho_1 g(H-z)\cos\theta + (\rho_s - \rho_a)g\cos\theta \int_z^H cdz \quad (35)$$

x 方向のレイノルズ方程式における $\partial p / \partial x$ は流れ場によって若干異なる形式をとる。

(a) 静止した領域中に浮遊流が流入する場合 $z = z_1$ での圧力が静水圧となることから $\partial H / \partial x = \tan\theta$ となる。これより、 x 方向の圧力勾配は次式で表される。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_1 g \sin\theta + (\rho_s - \rho_a)g \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H cdz \quad (36)$$

(b) 開水路流の場合 $z = z_1$ で水深が h となり、そこでの圧力が零となることから、 x 方向の圧力勾配は次式で表される。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_1 g \cos\theta \frac{\partial h}{\partial x} + (\rho_s - \rho_a)g \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h cdz \quad (37)$$

5. 定常、等流の基礎方程式

前節までに得られた基礎方程式をもとに流れが時間的に変化せず、さらに流れが流下方向に変化しない流れ（これを等流と呼ぶ）の場合に適用する。

(1) 連続式

$$\frac{dw}{dz} = w_s \cos\theta \frac{dc}{dz} \quad (38)$$

(2) 混相の質量保存式

$$\frac{d}{dz} \rho w = \rho_s w_s \cos\theta \frac{dc}{dz} - \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} \quad (39)$$

(3) 固相の質量保存式

$$\frac{d}{dz} cw = w_s \cos\theta \frac{dc}{dz} - \frac{d}{dz} \overline{c' w'} \quad (40)$$

(4) x 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned} \rho w \frac{du}{dz} - u \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} + \frac{d}{dz} \overline{\rho u' w'} + \frac{d}{dz} \overline{\rho' u' w'} + \frac{d}{dz} \overline{\rho' w' u} \\ + \frac{d}{dz} \overline{\rho' u' w'} = \rho_s w_s \cos\theta u' \frac{dc'}{dz} + \rho_* g \sin\theta \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 ρ_* は、(a) 静止した流体中に浮遊流が流入する場合に

$$\rho_* = \Delta\rho = (\rho_s - \rho_a)(c - c_1) = \rho_a R(c - c_1) \quad (42)$$

となり、(b) 開水路流の場合に

$$\rho_* = \rho = \rho_a(1 + Rc) \quad (43)$$

となる。

(5) 乱れエネルギーの式

$$\begin{aligned} \rho w \frac{dk}{dz} + \frac{1}{2} \overline{\rho' w'} \frac{d}{dz} u_i u_i + (u_i u_i - k) \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} \\ + \frac{du}{dz} (\overline{\rho u' w'} + \overline{\rho' u' w} + \overline{\rho' u' w'}) \\ + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_i' u_i' w'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i' u_i' w} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u_i' u_i' w'} + \overline{p' w'} \right) \\ = \frac{1}{2} \rho_s w_s \cos\theta u_i' u_i' \frac{dc'}{dz} + g \sin\theta \overline{\rho' u'} - g \sin\theta \overline{\rho' u'} \\ - g \cos\theta \overline{\rho' w'} - p \frac{dw'}{dz} - \rho \varepsilon + \mu w_s \cos\theta w' \frac{d}{dx} \left(\frac{dc'}{dz} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

境界条件は次のようになる。

$z = z_0$ (底面) で、

$$w_0 = W_0 \quad (45)$$

$$\overline{c' w'} \Big|_{z=z_0} = w_s E_s \quad (46)$$

$z = z_1$ (境界層外縁) で

$$w_1 = W_1 \quad (47)$$

$$\overline{c' w'} \Big|_{z=z_1} - w_s \cos\theta c_1 = -w_s \cos\theta F_s \quad (48)$$

6. 固体粒子濃度が十分小さい場合

以下の式の展開では、固体粒子の濃度が 1 に比べて十分小さい場合を取り扱う。このような条件は必ずしもブーシネスク近似と同じ仮定ではないことに留意する。すなわち、固体粒子の密度が流体の密度に比べてかなり大きな場合 $1 \ll c$ であるが、相対密度差 $\Delta\rho / \rho_a \gg 1$ となる場合があるからである。このような現象の代表的なものとして、雪崩、火砕流などが挙げられる。式(41)のレイノルズ方程式において、3重相関項は2重相関項に比べて小さく無視できると考える。すなわち、

$$|\overline{\rho u' w'}| \gg |\overline{\rho' u' w'}| \quad (49)$$

このとき、式(41)は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \overline{\rho u' w'} + \overline{\rho' w'} \frac{du}{dz} = \rho_* g \sin \theta \quad (50)$$

乱れ運動エネルギーの式において、以下の関係が成り立つと仮定する。

$$u^2 \gg k$$

$$|\overline{\rho u' w'}| \gg |\overline{\rho' u' w'}|$$

$$|\overline{\rho u_i' u_i' w'}| \gg |\overline{\rho' u_i' u_i' w'}|$$

上式を参照すると、乱れ運動エネルギーの式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \overline{\rho' w'} \frac{du^2}{dz} + u^2 \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} + \frac{du}{dz} \overline{\rho u' w'} \\ & \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u_i' u_i' w'} + \overline{p' w'} \right) = g \sin \theta \overline{\rho' u'} - g \cos \theta \overline{\rho' w'} - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (51)$$

一方向流の場合、境界層近似から

$$|\overline{\rho' u'}| \ll |\overline{\rho' w'}|$$

が成立する。また、式(51)の左辺の最終項は次のような拡散型で近似する。

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u_i' u_i' w'} + \overline{p' w'} = -\rho \frac{\nu_i}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \quad (52)$$

ここで、 ν_i は渦動粘性係数であり、 σ_k 乱れ運動エネルギーに対する乱流シュミット数である。このとき、式(51)は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_i}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + P + G - \rho \epsilon = 0 \quad (53)$$

$$P = -\overline{\rho u' w'} \frac{du}{dz} - \overline{\rho' w'} u \frac{du}{dz} - u^2 \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} \quad (54)$$

$$G = -g \cos \theta \overline{\rho' w'} \quad (55)$$

非ブーシネスク流体に対する分子粘性逸散率 ϵ に対する方程式を次のように求める。ブーシネスク流体に対する k, ϵ 方程式は次のように表される (Rodi¹¹)。 k 方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_i}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_* + G_* - \epsilon \quad (56)$$

ここで、 P_*, G_* はブーシネスク流体に対する乱れエネルギーの生成項と負の生成項であり、以下のように表される。

$$P_* = -\overline{u' w'} \frac{du}{dz} \quad (57)$$

$$G_* = -\frac{1}{\rho} g \cos \theta \overline{\rho' w'} \quad (58)$$

このとき、分子粘性逸散率 ϵ についての方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_i}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \\ & + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P_* + G_*) (1 + c_{3\epsilon} R_{f*}) - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (59)$$

ここで、 R_{f*} はフラックスRichardson数であり、次式で表される。

$$R_{f*} = \frac{-G_*}{P_* + G_*} \quad (60)$$

式(56)と式(59)を比較し、非ブーシネスク流体に対する ϵ 方程式は乱れ運動エネルギーの式(53)との比較の結果、次のように表される。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_i}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right) + c_{1\epsilon} (P + G) (1 + c_{3\epsilon} R_f) - c_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (61)$$

ここで、 R_f 、渦動粘性係数 ν_i は、次のように表される。

$$R_f = \frac{-G}{P + G} \quad (62)$$

$$\nu_i = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (63)$$

式(33)より

$$\overline{c' w'} = (\rho_s - \rho_a) \overline{c' w'} = (\rho_s - \rho_a) u_s \cos \theta (c - F_s) \quad (64)$$

ここで、渦動粘性係数を ν_i / σ_i とすると、濃度・速度相関項 $-\overline{c' w'}$ は次式のように与えられる。

$$\overline{c' w'} = -\frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{dc}{dz} \quad (65)$$

レイノルズ応力 $-\overline{\rho u' w'}$ は次のようになる。

$$-\overline{\rho u' w'} = \rho \nu_i \frac{du}{dz} \quad (66)$$

固体粒子の濃度が小さい場合、式(38)より

$$w = W_0 = 0 \quad (67)$$

となる。また、式(64), (41)は、式(65), (66)を用いると次のようになる。

$$\frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{dc}{dz} = -w_s \cos \theta (c - F_s) \quad (68)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \nu_i \frac{du}{dz} \right) + \rho_a R \frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{dc}{dz} \frac{du}{dz} + \rho g \sin \theta = 0 \quad (69)$$

k , ε に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{dk}{dz} \right) + P + G - \rho \varepsilon = 0 \quad (70)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{d\varepsilon}{dz} \right) + c_{1s} \{ P + (1 - c_{3s}) G \} - c_{2s} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (71)$$

ここで、乱れの生成項 P 、乱れの負の生成項 G は、式(65), (66)を用いて次のように表される。

$$P = \rho \nu_i \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \rho_a R \frac{\nu_i}{\sigma_i} u \frac{du}{dz} \frac{dc}{dz} + u^2 \rho_a R \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{dc}{dz} \right) \quad (72)$$

$$G = g \cos \theta \rho_a R \frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{dc}{dz} \quad (73)$$

境界条件は次のようになる。

$z = z_0$ (底面) で

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_0}{k_s} + Ar \quad (74)$$

$$\frac{\nu_i}{\sigma_i} \frac{dc}{dz} = w_s E_s \quad (75)$$

$$\frac{k}{u_*^2} = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} \quad (76)$$

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z_0} \quad (77)$$

$z = z_1$ で

$$\frac{du}{dz} = \frac{dk}{dz} = \frac{d\varepsilon}{dz} = 0 \quad (78)$$

7. 方程式の無次元化

前節で得られた連立常微分方程式を数値的に解くために、諸変数を無次元化する。特性速度を摩擦速度 $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho_a}$ 、特性長さを境界層厚 d (開水路の浮遊砂

流の場合、水深 h とする)、底面濃度 $c_b (= c_0)$ とし、諸変数を次のように表す。

$$u = \bar{u} u_* \quad w = \bar{w} u_* \quad c = \bar{c} c_b$$

$$k = \bar{k} u_*^2 \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} \frac{u_*^3}{d} \quad z = \bar{z} d$$

$$\nu_i = \bar{\nu}_i u_* d \quad \rho = \bar{\rho} \rho_a \quad F_s = \bar{F}_s c_b \quad (79)$$

このとき、固相の質量保存式、流下方向のレイノルズ方程式、 k 方程式、 ε 方程式は次のように無次元化される。

$$\bar{\nu}_i \frac{d\bar{c}}{d\bar{z}} = -\frac{1}{Z} (\bar{c} - \bar{F}_s) \quad (80)$$

ここで、 Z は次に示されるような無次元パラメータである。

$$Z = \frac{\sigma_i u_*}{w_s \cos \theta} \quad (81)$$

流下方向のレイノルズ方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\bar{\rho} \bar{\nu}_i \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} \right) + \chi \frac{\bar{\nu}_i}{\sigma_i} \frac{d\bar{c}}{d\bar{z}} \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} + 1 + \chi \bar{c} = 0 \quad (82)$$

k 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\bar{\rho} \frac{\bar{\nu}_i}{\sigma_i} \frac{d\bar{k}}{d\bar{z}} \right) + \bar{P} + \bar{G} - \bar{\rho} \bar{\varepsilon} = 0 \quad (83)$$

ここで、 \bar{P} , \bar{G} は、それぞれ、無次元の乱れエネルギー生成項、無次元の乱れエネルギーの負の生成項であり、次式のように表される。

$$\bar{P} = (1 + \chi \bar{c}) \bar{\nu}_i \left(\frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} \right)^2 + \chi \frac{\bar{\nu}_i}{\sigma_i} \frac{d\bar{c}}{d\bar{z}} \bar{u} \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} + \chi \bar{u}^2 \frac{d}{d\bar{z}} \left(\frac{\bar{\nu}_i}{\sigma_i} \frac{d\bar{c}}{d\bar{z}} \right) \quad (84)$$

$$\bar{G} = R_i \frac{\bar{\nu}_i}{\sigma_i} \frac{d\bar{c}}{d\bar{z}} \quad (85)$$

ここで、 R_i はリチャードソン数であり次式で与えられる。

$$R_i = \frac{R c_b g \cos \theta d}{u_*^2} \quad (86)$$

ε 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\bar{z}} \left(\bar{\rho} \frac{\bar{\nu}_i}{\sigma_i} \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{z}} \right) + c_{1s} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \{ \bar{P} + (1 - c_{3s}) \bar{G} \} - c_{2s} \bar{\rho} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \quad (87)$$

ここで、 $\bar{\rho}$ 、無次元のレイノルズ応力、無次元の濃度速度相関、無次元の渦動粘性係数 $\tilde{\nu}$ 、無次元パラメータ χ は、次のように表される。

$$\bar{\rho} = 1 + Rc_b \tilde{c} = 1 + \chi \tilde{c} \quad (88)$$

$$-\overline{u'w'} = \tilde{\nu}_t \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} \quad (89)$$

$$-\overline{\rho'w'} = -\chi \tilde{c}' \overline{w'} = \chi \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} \quad (90)$$

$$\tilde{\nu}_t = c_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (91)$$

$$\chi = Rc_b \quad (92)$$

境界条件は次のように無次元化して表される。

$\tilde{z} = \tilde{z}_0$ で

$$\tilde{u} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\tilde{z}_0}{\tilde{k}_s} + A_s \quad (93)$$

$$\tilde{c} = 1 \quad (94)$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} \quad (95)$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{\kappa \tilde{z}_0} \quad (96)$$

$\tilde{z} = 1$ で

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{k}}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\tilde{z}} = 0 \quad (97)$$

以上において、主たる未知数は \tilde{u} 、 \tilde{c} 、 \tilde{k} 、 $\tilde{\epsilon}$ であり、式(80)、(82)、(83)、(87)を基礎方程式として、境界条件式(93)から(97)のもとで数値計算を行った。得られた無次元量から次元量に変換することができる。実験や野外観測では、流量 q 、固体粒子の流送量 q_s 、水路床勾配 $\tan \theta$ が与えられ、水深 d 、底面濃度 c_b が未知量であることが多い。ここでは、そのような場合を想定して d 、 c_b を求める方法について述べる。

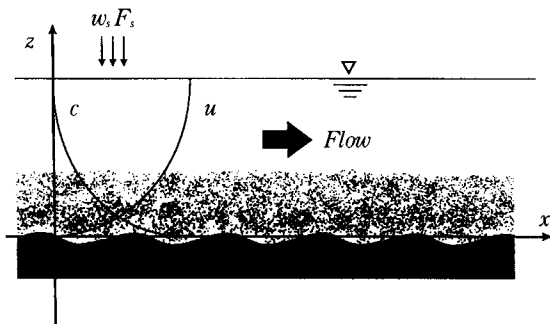


Fig. 1 Schematic view of open channel suspension flow.

開水路流の場合、底面での摩擦速度 u_* は、流下方向の力の釣り合いから、次のように求められる。

$$u_* = \sqrt{gd_R \sin \theta} \quad (98)$$

ここで、 d_R は水路の径深であり、水深 d 、水路幅 B の長方形断面水路の場合、次式により求められる。

$$d_R = \frac{Bd}{B+2d} = \frac{d}{1+2d/B} \quad (99)$$

単位幅流量 q 、単位幅流送量 q_s は流速分布、濃度分布が与えられたとき、次のように求められる。

$$q = \int_0^d u dz = u_* d \int_0^1 \tilde{u} d\tilde{z} = I_1 u_* d \quad (100)$$

$$q_s = \int_0^d u c dz = u_* c_b d \int_0^1 \tilde{u} \tilde{c} d\tilde{z} = I_2 u_* c_b d \quad (101)$$

ここで、 I_1 、 I_2 は次式で定義される積分値である。

$$I_1 = \int_0^1 \tilde{u} d\tilde{z} \quad (102)$$

$$I_2 = \int_0^1 \tilde{u} \tilde{c} d\tilde{z} \quad (103)$$

式(100)と式(101)より、底面濃度 c_b を次のように求めることができる。

$$c_b = (q_s I_1) / (q I_2) \quad (104)$$

式(99)と式(100)より、水深 d を次のように求めることができる。

$$d = \left\{ q / \left(I_1 \sqrt{\frac{g \sin \theta}{1+2d/B}} \right) \right\}^{2/3} \quad (105)$$

式(105)は未知数 d が右辺にも含まれているので、反復計算を行うことになる。

8. 開水路浮遊砂流への適用

非ブーシネスク流体としたことの効果は、拡散項の中で密度が考慮されていること、及び、式(82)の第二項、式(84)の第一項、第二項、第三項により表される。

開水路流における浮遊砂流を $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いて解析した例はいくつかある(De Vantier and Larock²⁾、福嶋³⁾、福田と福嶋⁴⁾、藤崎と高崎⁵⁾)。ここでは、比較的精度のよい実験結果を得ているVanoni and Nomicos⁶⁾の実験条件で浮遊砂流を解析し、今回のモデルの妥当性を検討する。福田と福嶋⁴⁾はブーシネスク近似を用いた基礎方程式を用いて、同

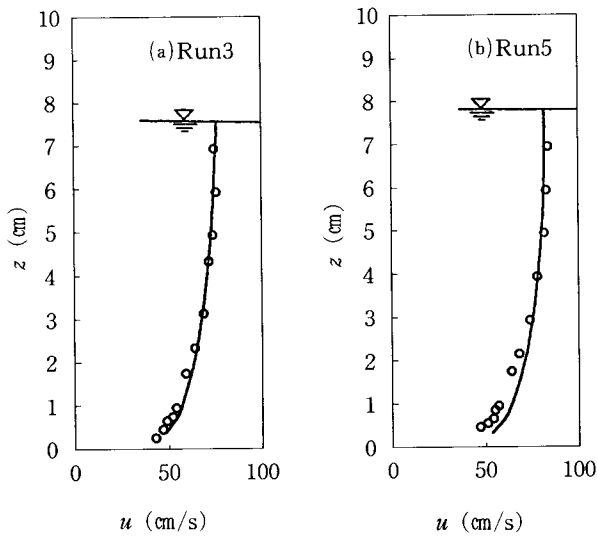


Fig. 2 Comparison of calculated velocity profiles and experimental data of Run 3 and Run 5 by Vanoni and Nomicos⁶⁾. Open circles indicate measured data and lines indicate calculated data.

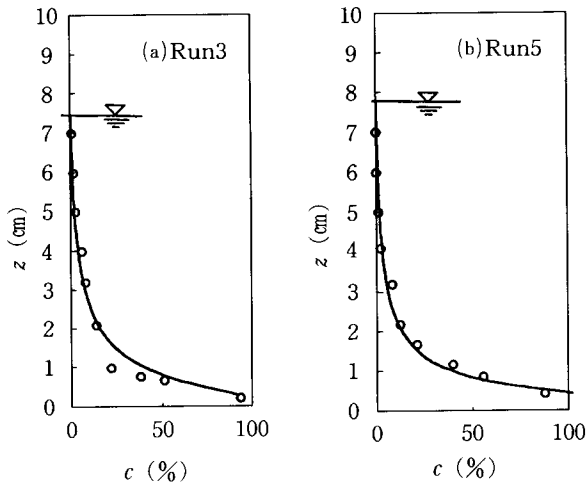


Fig. 3 Comparison of calculated concentration profiles and experimental data of Run 3 and Run 5 by Vanoni and Nomicos⁶⁾. Open circles indicate measured data and lines indicate calculated data.

じ実験条件で数値計算を行い流速と濃度の実験結果と比較を行っている。

計算では、単位幅流量 q 、単位幅流砂量 q_s を与えた。無次元パラメータ k_s/h 、 σ_i を変化させ、流速分布と濃度分布が最も一致するようにこれらの値を定めた。Table 1 に計算に用いた Vanoni and Nomicos の実験条件をまとめて示す。

Fig. 2, Fig. 3 は流速分布と濃度分布の数値計算結果を Vanoni and Nomicos⁶⁾ (Run 3, Run 5) の実験値と比較したものである。これより、流速分布、濃度分布についての数値解は、パラメータ k_s/h 、 σ_i を適切に選べば実測値を良好に説明できることがわかる。浮遊砂濃度勾配は底面の付近で急になっている。これに対応して流速勾配は、清水流の場合に比べて底面付近で大きくなっているのがわかる。このことが浮遊砂流の特徴である。先にも述べたように福田と福嶋⁴⁾ は、ブーシネスク近似を用いた基礎方程式により同様の計算を行っている。その結果によると、ブーシネスク近似を用いた数値計算でも Fig. 2, 3 と同程度の一貫度であった。これは浮遊砂流の濃度が小さく、無次元パラメータ χ の値が、0.015 (Run 3), 0.02 (Run 5) と小さく非ブーシネスク流体としての特性が顕著には表れなかったことによる。

Fig. 4 は、Fig. 2, 3 と同様に他の実験条件の計算結果も含め得られた (a) 乱れ運動エネルギー \bar{k} 、分子粘性逸散率 $\bar{\epsilon}$ 、と (b) 渦動粘性係数 $\bar{\nu}$ を比較したものである。この中で、vn は Vanoni and Nomicos⁶⁾ の実験結果、b 1 - b 3, m 1 - m 3 は今回新たに行った実験結果である。今回の実験では Vanoni and Nomicos の実験より浮遊砂濃度が小さくなっていた。このため、これに対応する計算結果は、浮遊砂がない場合の計算結果とほぼ等しくなっており、Fig. 4 上では差違がほとんど認められず、これらの記号は重なっている。Vanoni and Nomicos⁶⁾ に対する計算結果は乱れエネルギー \bar{k} 、分子粘性逸散率 $\bar{\epsilon}$ ともに底面付近で値が小さくなっている。また、底面濃度の増加に伴って上半部で渦動粘性係数 $\bar{\nu}$ が減少している。よく知られているように、浮遊砂濃度の増加にしたがって乱流構造に変化が生じ、カルマン定数 κ が減少する、すなわち抵抗係数が減少するという実験事実がある。志村⁷⁾、日野⁸⁾ の先駆的な研究によって、浮遊砂濃度の増加に伴って、カルマン定数が減少することが解析的に説明されている。ここで示したように $k - \epsilon$ 乱流モデルを用いた数値解析でも、この現象を的確に説明できることがわかる。

Tabel 1 Expeimetal conditions (Vanoni and Nomicos⁶⁾)

Run No.	q (cm^2/s)	q_s (cm^2/s)	h (cm)	c_b (%)	θ	k_s/h	σ_t
Run 3	500	0.612	7.44	0.923	0.0020	0.0040	1.1
Run 5	571	0.678	7.83	1.216	0.0021	0.0028	1.4

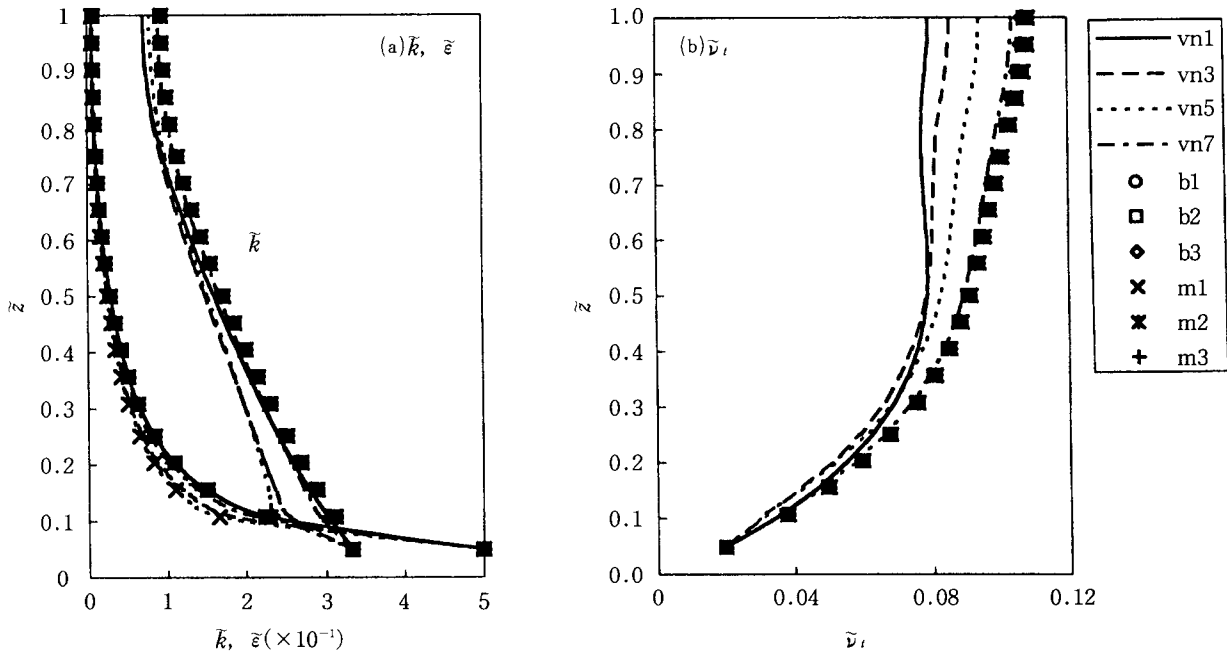


Fig. 4 Non-dimensional vertical profiles of the kineteic energy of turbulence \bar{k} , the viscous dissipation rate of turbulence $\bar{\epsilon}$ and the eddy viscosity $\bar{\nu}_t$.

9. 結 論

固体粒子を含む流れを非ブーシネスク流体と見なし、このような流れに対する乱流モデルを新たに定式化した。基礎方程式系は、連続式、固体粒子の質量保存式、レイノルズ方程式、乱れエネルギーの方程式、分子粘性逸散率の方程式で構成され、いずれの方程式でも混合流体特有の新たな項が考慮されており、かつ、ブーシネスク近似は採用されていない。固体粒子を含む流れの例として、開水路の浮遊砂流を想定し、最も単純化した流れである等流の条件に対し、数値計算を行った。計算結果はVanoni and Nomicos⁶⁾の実験結果を良好に説明できることを示し、今回提案した非ブーシネスク流体に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルが適切に実験結果を説明できることが示された。

今後は、非ブーシネスク流体の特徴を顕著に持つ、吹雪や飛砂などの固・気二相流にこの解析を発展させ、基礎方程式及び数値解析法の妥当性を検討する必要がある。

ある。

本研究の数値計算では本学大学院修士生鏡原聖史君（現在（株）ダイヤコンサルタント）の助力を得た。ここに記して、感謝の意を表します。また、本研究の一部は、文部省科学研究費、基盤研究(C)（課題番号09650563）の補助を受けた。ここに記して、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Rodi, W., Turbulence models and their application, *State of the Arts Paper, IAHR*, 1980.
- 2) DeVantier, B.A. and B.E. Larock, Sediment transport in stratified turbulent flow, *J. Hydraulic Eng.*, ASCE, Vol. 109, No. 12, pp. 1622-1635, 1983.
- 3) 福嶋祐介, 開水路浮遊砂流の乱流構造の解析, 第30回水理講演会論文集, 第30巻, pp. 631-636, 1986.

- 4) 福田正晴, 福嶋祐介, 浮遊砂流に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルの適合性について, 第31回水理講演会論文集, 第31巻, p p. 587-591, 1987.
- 5) 藤崎一裕, 高崎秀一, 浮遊砂を伴う開水路流れの解析, 水工学論文集, 第41巻, pp. 813-818, 1997.
- 6) Vanoni, V.A. and Nomicos, G.N., Resistance properties of sediment-laden streams, Trans. ASCE, Vol. 125, pp. 1140-1175, 1960.
- 7) 志村博康, 流砂ある水流の諸特性について, 土木学会論文集, 第46号, pp.22-29, 1967.
- 8) 日野幹雄, 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 第92号, pp. 11-20, 1963.