

非ブーシネスク $k-\epsilon$ 乱流モデルによる吹雪の流動解析

福嶋 祐介*

Numerical Analysis of Snow Drift Using Non-Boussinesq $k-\epsilon$ Turbulence Model

Yusuke FUKUSHIMA

The some analysis on the suspension flow with solid particles cannot use the Boussinesq approximation for the case that the density of solid particles is appreciably larger than the density of ambient fluid. The formulation of $k-\epsilon$ turbulence model for the solid-fluid two phase flow, in which the flow is treated as the non-Boussinesq fluid, is represented. The basic equations consists of the continuity equation, the mass conservative equation for the solid phase, the Reynolds equation, the equation of the kinetic energy of turbulence (k) and the equation of the viscous dissipation rate (ϵ) in which $k-$ and $\epsilon-$ equations are corrected. The model calculations for the snow drift on the horizontal plane and in the case of the slope angle of 30° are carried out. In the case of the horizontal plane, as the bed concentration of snow particles is larger, the velocity is slightly larger. In the case of $\theta=30^\circ$, the velocity becomes remarkably large as the increase of the bed concentration. Comparing the results of the calculation using the Boussinesq approximation and the calculation assuming the non-Boussinesq fluid, the critical bed concentration for both case is found out to be 0.03%.

Key words : solid-fluid two phase flow, suspension flow, non-Boussinesq approximation, numerical analysis, $k-\epsilon$ turbulence model

1. 序 論

水の流れや風により固体粒子が浮遊状態で輸送される現象は自然界でしばしば観察される。大きな湖や海の海底渓谷は泥水流 (turbidity currents) と呼ばれる流れが発生する。また、河川においては、水の流れとともに大量の土砂が掃流や浮遊の状態に運ばれる。これらはいずれも水の流れに伴う乱れによって、固体粒子である土砂が浮遊状態で輸送される現象である。これらは作業流体が水などの液体であることから、固液二相流と呼ばれている。

一方、作業流体が空気の場合には、固気二相流と呼ばれており、様々な条件のもとで発生する。海岸地域や砂漠地帯においては、大量の砂が浮遊状態で輸送される飛砂と呼ばれる現象が知られている。厳冬期山岳地帯で発生する煙型雪崩は、風の乱れによって乾いた雪粒子が浮遊状態で流れる現象である。同様に、平地でも地吹雪と呼ばれる現象があり、乱流状態の空気の流れである風によって、雪粒子が浮遊状態で流れるものである。火山の活動に伴って発生する火砕流は雪崩や吹雪と類似の流れであり、これもまた典型的な固気二相流である。

固液二相流や固気二相流等の固流二相流を解析する手法の1つに固体粒子の輸送の解析において、拡散方

程式を用いる方法がある。これは粒径の小さな固体粒子の空間での存在確率を体積濃度の分布として表現する。固体が流体の運動によく追従して運動し、固体粒子と周囲流体との速度差が沈降速度の大きさであると仮定される。このような取り扱いによって、運動方程式中において密度が空間的に一様ではないことを考慮して、解析することが可能になる。

固気二相流では、一般に固体粒子の密度が気体の密度に比べて遙かに大きいので注意が必要である。ここで、吹雪の場合を考えて見よう。雪粒子の密度は空隙がない場合純水の密度となり、空気の密度の約710倍である。従って、体積濃度が1%でも、混合流体としての密度は空気の約7倍である。

固液混相流などで、密度差が小さい場合には密度変化を重力項及び圧力項のみで考慮し、慢性項と粘性項では密度を一定とするブーシネスク近似が用いられることが多い。実際、開水路の浮遊砂流では体積濃度が1%とかなり大きくなっても相対密度差は最大で0.0165程度で密度変化はかなり小さい。従ってこのような流れでのブーシネスク近似は有効であると考えられる。一方、固気混相流では先に述べたように固体粒子の密度が気体の密度に比べてかなり大きく、ブーシネスク近似は許容されないと考えられる。このような混相流体を非ブーシネスク流体と呼ぶことにする。

固流混相流については数多くの研究がなされている。開水路における浮遊砂流は土木の分野で重要な現象で

原稿受付：平成10年5月30日

*長岡技術科学大学 環境・建設系

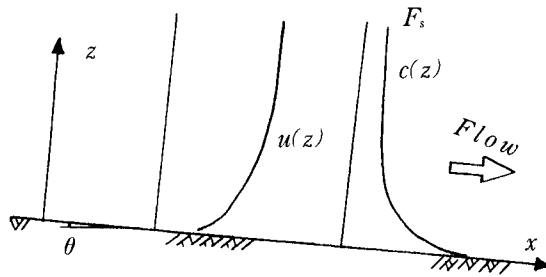


Fig. 1 Schematic view of snow drift and its coordinate system.

あり、 $k-\epsilon$ 乱流モデル (Rodi¹⁾) を用いて解析された例として、DeVantier and Larock²⁾、福嶋²⁾、福田・福嶋⁴⁾、藤崎・高崎⁵⁾の例がある。また、吹雪については、小林⁶⁾・⁷⁾による現地観測、Uematsu et al.⁸⁾による数値計算例がある。この解析ではブーンネスク近似が採用されている。

著者⁹⁾は非ブーンネスク流体に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルを提案し、開水路流の解析に適用した。先に述べたように浮遊砂流では密度差が小さく、非ブーンネスク流体として取り扱う必要はない。また、先の論文では式の誘導の一部に見落としがあり、乱れ運動エネルギーの式と分子粘性逸散率の式が間違っていた。本論文では、この点を修正するとともに、典型的な非ブーンネスク流体である地吹雪を対象として計算を行った結果について述べる。

2. 基礎方程式

固体と流体との二相流が傾斜角 θ の斜面上を流下する場合を考える。斜面に沿った座標系 x_i ($i=1,2,3$)を考える。ここで、 x_1 を斜面方向の座標、 x_2 を水平方向、 x_3 を斜面と直行方向上向きにとる。これらに対応する流速成分を \hat{u}_i とする。流れの場に作用する外力は重力であり、重力加速度を g とする。静止した流体中の固体粒子の沈降速度を w_s 、その x_i 方向成分を w_{si} とする。粒子の体積濃度を \hat{c} とする。固流二相流の基礎方程式を定式化するにあたり、固体粒子の粒径および沈降速度が小さく、粒子の速度と流体の鉛直速度と沈降速度だけ異なると仮定する。沈降速度の x_i 成分は次式で表される。

$$w_{s1} = w_s \sin \theta \quad (1)$$

$$w_{s2} = 0 \quad (2)$$

$$w_{s3} = -w_s \cos \theta \quad (3)$$

従って、沈降速度ベクトル w_s は次のように書くことができる。

$$w_s = (-w_s \sin \theta, 0, w_s \cos \theta) \quad (4)$$

流体相の連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \hat{c}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{u}_i (1 - \hat{c}) = 0 \quad (5)$$

固相の質量保存式は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{c} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{u}_i - w_{si}) \hat{c} = 0 \quad (6)$$

式(5)と式(6)の和をとると次式を得る。

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} w_{si} \hat{c} \quad (7)$$

固体粒子の密度を ρ_s 、流体の密度を ρ_a とする。固体と流体の混相の密度 $\hat{\rho}$ は、固体粒子の体積濃度を \hat{c} とするとき、次式で与えられる。

$$\hat{\rho} = \rho_a + (\rho_s - \rho_a) \hat{c} = \rho_a (1 + R\hat{c}) \quad (8)$$

ここで、 $R = (\rho_s - \rho_a) / \rho_a$ は固体粒子の流体中での有効比重であり、 $R\hat{c}$ が流体に対する相対密度差となる。式(8)に式(5)と式(6)の関係を用いると、混相流体の質量保存式は次式のように求められる。

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\rho} \hat{u}_i = \rho_s w_{si} \frac{\partial \hat{c}}{\partial x_i} \quad (9)$$

また、混相流体に対するナビエーストークスの方程式は次のようになる。

$$\hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{\rho} \hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} = \hat{\rho} g_i - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (10)$$

ここで、 μ は粘性係数、 g_i は重力加速度の x_i 成分である。流れが十分発達した乱流であり、流速成分 \hat{u}_i 、固体粒子の体積濃度 \hat{c} 、圧力 \hat{p} がそれぞれ平均値と変動量に分けられるものとする。すなわち、

$$\hat{u}_i = u_i + u'_i$$

$$\hat{c} = c + c'$$

$$\hat{p} = p + p'$$

である。ここで、 u_i が平均流速成分、 u'_i が変動流速成分、 c が平均濃度、 c' が変動濃度、 p が平均圧力、 p' が変動圧力である。体積濃度の変動に伴って混相の密度 $\hat{\rho}$ も変化し、 ρ を平均密度、 ρ' を密度の変動成分とする。これらと濃度との関係は次式で表される。

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \rho + \rho' \\ \rho &= \rho_a(1 + Rc) \\ \rho' &= \rho_a Rc' \end{aligned}$$

このとき、平均流の連続方程式、混相流の質量保存式、固相の質量保存式、レイノルズ方程式、レイノルズ応力の方程式、乱れ運動エネルギーの方程式は次のようになる。

(1) 連続方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = w_x \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (11)$$

(2) 混相流の質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j = \rho_a w_x \frac{\partial c}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho' u_j'} \quad (12)$$

(3) 固相の質量保存則

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} c u_j = w_x \frac{\partial c}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{c' u_j'} \quad (13)$$

(4) レイノルズ方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{\rho' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u_i'} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u' u_j'} + \overline{\rho' u' u_j} + \overline{\rho' u' u_j'}) \\ = \rho_a w_x u_i' \frac{\partial c'}{\partial x_j} + \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ + \mu w_{sk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

(5) レイノルズ応力の方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i' u_j'} + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i' u_j'} + \overline{\rho' u_k'} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} \\ - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho' u_k'} + \overline{\rho' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{\rho' u_i'} \frac{\partial u_j}{\partial t} \\ + \frac{\partial}{\partial u_i} \overline{\rho' u_i' u_j'} + (\overline{\rho u' u_k'} + \overline{\rho' u' u_k} + \overline{\rho' u' u_k'}) \frac{\partial}{\partial u_k} \\ + (\overline{\rho u' u_k'} + \overline{\rho' u' u_k} + \overline{\rho' u' u_k'}) \frac{\partial u_i}{\partial u_k} \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{\rho u' u' u_k'} + \overline{\rho' u' u' u_k} + \overline{\rho' u' u' u_k'}) \\ = \rho_a w_{sk} u_i' \frac{\partial c'}{\partial x_k} + g_i \overline{\rho' u_j'} + g_j \overline{\rho' u_i'} \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u_j'} \delta_{ik} + \overline{p' u_i'} \delta_{jk}) - p' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial u_j'} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \overline{u_i' u_j'} - 2 \mu \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial x_k} \\ + \mu w_{sk} \left\{ \overline{u_j'} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c'}{\partial x_i} \right) + \overline{u_i'} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c'}{\partial x_j} \right) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

(6) 乱れ運動エネルギーの方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} - k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\rho' u_k'} + \overline{\rho' u_i'} \frac{\partial u_i}{\partial t} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u_i' u_i'} + (\overline{\rho u' u_k'} + \overline{\rho' u' u_k} + \overline{\rho' u' u_k'}) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho u' u' u_k'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' u_k} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' u_k} + \overline{p' u_k'} \right) \\ = \frac{1}{2} \rho_a w_{sk} u_i' \frac{\partial c'}{\partial x_k} + g_i \overline{\rho' u_i'} + p' \frac{\partial}{\partial x_i} w_x c' + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k \partial x_k} \\ - \rho \epsilon + \mu w_{sk} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、\$t\$ は時間、\$k\$ (\$= \frac{1}{2} \overline{u' u' u_i'}\$) は乱れ運動エネルギー、\$\epsilon\$ は分子粘性逸散率、\$\mu\$ は粘性係数である。以上の式において、混相流が非ブーシネス流体であるとしたことによって、レイノルズ方程式、レイノルズ応力の方程式、乱れ運動エネルギーの式において、密度変動 \$\rho'\$ と速度変動 \$u_i'\$ の高次相関項が数多く含まれていることが特徴である。

空間座標 \$x_i\$、流速の平均成分 \$u_i\$、その変動成分 \$u_i'\$ を次のように表す。

$$x_i = (x, y, z) \quad u_i = (u, v, w) \quad u_i' = (u', v', w') \quad (17)$$

重力加速度の \$x_i\$ 方向成分 \$g_i\$ は次のようになる。

$$g_i = (g \sin \theta, 0, -g \cos \theta) \quad (18)$$

このとき、式(11)から式(16)は以下のように書き換えられる。

(1) 連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -w \sin \theta \frac{\partial c}{\partial x} + w \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} \quad (19)$$

(2) 混相の質量保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = -\rho_a w \sin \theta \frac{\partial c}{\partial x} \\ + \rho_a w \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho' u'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho' v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \end{aligned} \quad (20)$$

(3) 固相の質量保存式

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} cu + \frac{\partial}{\partial y} cv + \frac{\partial}{\partial z} cw = -w_s \sin \theta \frac{\partial c}{\partial x} + w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \overline{c'u} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{c'v} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c'w} \end{aligned} \quad (21)$$

(4) x 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \overline{\rho'u} \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\rho'v} \frac{\partial u}{\partial y} + \overline{\rho'w} \frac{\partial u}{\partial z} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho'u} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'u'w'} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u'u} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'u'v} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'u'w} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u'^2} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'u'w'} \\ = -\rho w_s \sin \theta u' \frac{\partial c'}{\partial x} + \rho w_s \cos \theta u' \frac{\partial c'}{\partial z} + \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (22)$$

(5) y 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} \\ + \overline{\rho'u} \frac{\partial v}{\partial x} + \overline{\rho'v} \frac{\partial v}{\partial y} + \overline{\rho'w} \frac{\partial v}{\partial z} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho'v} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u'v'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'v'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'v'w'} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'v'u} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'v'v} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'v'w} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u'v'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'v'^2} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'v'w'} \\ = -\rho w_s \sin \theta v' \frac{\partial c'}{\partial y} + \rho w_s \cos \theta v' \frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (23)$$

(6) z 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} \\ + \overline{\rho'u} \frac{\partial w}{\partial x} + \overline{\rho'v} \frac{\partial w}{\partial y} + \overline{\rho'w} \frac{\partial w}{\partial z} \\ + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho'w} + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u'w'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'v'w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'w'^2} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'w'u} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'w'v} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'w'w} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u'w'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'v'w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'w'^2} \end{aligned}$$

$$= -\rho w_s \sin \theta w' \frac{\partial c'}{\partial x} + \rho w_s \cos \theta w' \frac{\partial c'}{\partial z} - \rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (24)$$

(7) 乱れエネルギー k の方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} + \rho w \frac{\partial k}{\partial z} \\ - k \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{\rho'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{\rho'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho'w'} \right) + \overline{\rho'u'} \frac{\partial k}{\partial x} \\ + \overline{\rho'v'} \frac{\partial k}{\partial y} + \overline{\rho'w'} \frac{\partial k}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho'u'^2} + \overline{\rho'v'^2} + \overline{\rho'w'^2}) \\ + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{\rho'u'^2} + \overline{\rho'u'u'} + \overline{\rho'u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\rho'u'v'} + \overline{\rho'u'v} + \overline{\rho'u'v'}) \\ + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho'u'w'} + \overline{\rho'u'w} + \overline{\rho'u'w'}) + \frac{\partial v}{\partial x} (\overline{\rho'u'v'} + \overline{\rho'v'u} + \overline{\rho'u'v'}) \\ + \frac{\partial v}{\partial y} (\overline{\rho'v'^2} + \overline{\rho'v'v} + \overline{\rho'v'^2}) + \frac{\partial v}{\partial z} (\overline{\rho'v'w'} + \overline{\rho'v'w} + \overline{\rho'v'w'}) \\ + \frac{\partial w}{\partial x} (\overline{\rho'u'w'} + \overline{\rho'w'u} + \overline{\rho'u'w'}) \\ + \frac{\partial w}{\partial y} (\overline{\rho'v'w'} + \overline{\rho'w'v} + \overline{\rho'v'w'}) \\ + \frac{\partial w}{\partial z} (\overline{\rho'w'^2} + \overline{\rho'w'w} + \overline{\rho'w'^2}) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \{ \overline{\rho'u'u'u'} + \overline{\rho'u'u'u} + \overline{\rho'u'u'u'} + 2 \overline{\rho'u'} \} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \{ \overline{\rho'u'u'v'} + \overline{\rho'u'u'v} + \overline{\rho'u'u'v'} + 2 \overline{\rho'v'} \} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \{ \overline{\rho'u'u'w'} + \overline{\rho'u'u'w} + \overline{\rho'u'u'w'} + 2 \overline{\rho'w'} \} \\ = -\frac{1}{2} \rho w_s \sin \theta u'u' \frac{\partial c'}{\partial x} - \frac{1}{2} \rho w_s \cos \theta u'u' \frac{\partial c'}{\partial z} \\ + g \sin \theta \overline{\rho'u'} - g \cos \theta \overline{\rho'w'} - \rho \varepsilon \\ + \overline{\rho' \frac{\partial c'}{\partial x}} w_s \sin \theta - \overline{\rho' \frac{\partial c'}{\partial z}} w_s \cos \theta \\ + \mu \left(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

以上が密度変動を考慮した固体・流体二相隆の基礎方程式の完全な式系である。以下ではこれらの式をもとに、解析対象を具体的に絞り、方程式を簡略化する。対象とする流れ鉛直二次元であり、流下方向の流れが鉛直方向の流れに比べて卓越しているものとする。ただし、レイノルズ方程式中で粘性項が他の項に比べて十分小さく無視できると仮定する。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial z}, \quad w \ll u, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad (26)$$

が成立する場合を考える。このとき式(19)から式(25)は次のようになる。

(1) 連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} \quad (27)$$

(2) 混相の質量保存式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial z} \rho w = \rho_s w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} \quad (28)$$

(3) 固相の質量保存式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} cu + \frac{\partial}{\partial z} cw = w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c' w'} \quad (29)$$

(4) x 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \overline{\rho' w'} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' u' w'} \\ & = \rho_s w_s \cos \theta \overline{u' \frac{\partial c'}{\partial z}} + \rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (30)$$

(5) z 方向のレイノルズ方程式

$$-\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (31)$$

(6) 乱れエネルギーの方程式

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho w \frac{\partial k}{\partial z} \\ & - k \frac{\partial}{\partial z} \overline{\rho' w'} + \overline{\rho' u'} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho' u'^2} + \overline{\rho' v'^2} + \overline{\rho' w'^2}) \\ & + \frac{\partial u}{\partial z} (\overline{\rho' u' w'} + \overline{\rho' u' w} + \overline{\rho' u' w'}) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \overline{\rho' u' w'} \right) \\ & = -\frac{1}{2} \rho_s w_s \cos \theta \overline{u' u' \frac{\partial c'}{\partial z}} + g \sin \theta \overline{\rho' u'} - g \cos \theta \overline{\rho' w'} \\ & - \overline{p' \frac{\partial w'}{\partial z}} + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (32)$$

3. 固体粒子の質量保存式に対する境界条件

固体粒子濃度に対する境界条件を明確にするため、

式(29)を流れと直交方向に積分し、層積分方程式を導く。積分を $z = z_0$ (底面近傍) から $z = z_1$ (境界層の外縁) の範囲で行う。

$$\begin{aligned} & \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cw}{\partial z} - w_s \cos \theta \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{c' w'} \right) dz \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_1} cdz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} cudz \\ & - c_1 \left(\frac{\partial z_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} - w_1 \right) + c_0 \left(\frac{\partial z_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} - w_0 \right) \\ & - (w_s \cos \theta c_1 - \overline{c' w'} |_{z=z_1}) + (w_s \cos \theta c_0 - \overline{c' w'} |_{z=z_0}) \end{aligned} \quad (33)$$

境界層の外縁及び底面付近での連行速度 W_1 , W_0 を次のように定義する。

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} - w_1 = W_1 \quad (34)$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial z_0}{\partial x} - w_0 = -W_0 \quad (35)$$

一般に、固定床では式(35)における w_0 , W_0 は零である。一方、固体粒子の濃度が大きく、底面の洗掘、堆積が顕著な場合は w_0 , W_0 は零とはならないことに留意する。同様に連続式(27)の層積分を行うと次式を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} udz = W_1 + W_0 + w_s \cos \theta (c_1 - c_0) \quad (36)$$

式(33)に式(34), (35)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_1} cdz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} cudz = c_0 W_0 + c_0 + c_1 W_1 \\ & - (w_s \cos \theta c_1 - \overline{c' w'} |_{z=z_1}) + (w_s \cos \theta c_0 - \overline{c' w'} |_{z=z_0}) \end{aligned} \quad (37)$$

以上の検討より、底面と境界層外縁での運動学的境界条件が式(34), (35)で与えられることが分かる。また、固体粒子濃度の拡散方程式に対する境界条件は、底面と境界層外縁での濃度フラックスを与えることであり、次式のように表される。

$$z = z_0 \text{ で, } \quad \overline{c' w'} |_{z=z_0} = w_s \cos \theta E_s \quad (38)$$

$$z = z_1 \text{ で, } \quad w_s \cos \theta c_1 - \overline{c' w'} |_{z=z_1} = w_s \cos \theta F_s \quad (39)$$

ここで、 E_s は流れによる固体粒子の底面での連行係数、 F_s は境界層外縁での固体粒子の無次元沈降フラックス (有次元の沈降フラックスは $w_s \cos \theta F_s$ で与えられる) である。

このとき、固体粒子の質量保存式の積分形の式(37)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_0}^{z_1} cz dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^{z_1} cudz \\ & = c_1 E_{1e} + c_0 W_{0e} + w_s \cos \theta F_s + w_s (E_s - c_0 \cos \theta) \end{aligned} \quad (40)$$

ここで、底面濃度 c_0 を c_b とした。

4. 圧力勾配の評価

x 方向のレイノルズ方程式(30)には圧力 p が含まれている。この項は対象とする流れによって異なる境界条件で定められる。このことを以下に示す。

(a) 吹雪の場合

固体粒子浮遊流を一般的に考えて、上方から固体粒子の供給 $w_s F_s$ がある場合を考える。このとき、境界層外縁での密度 ρ_1 、任意位置での混相の密度 ρ は次のようになる。

$$\rho_1 = \rho_a + (\rho_s - \rho_a) c_1 = \rho_a (1 + R c_1) \quad (41)$$

$$\rho = \rho_a + (\rho_s - \rho_a) c = \rho_a (1 + R c) \quad (42)$$

z 方向の流速 w は x 方向の流速 u に比べて小さいのでレイノルズ方程式は簡単になって次のようになる。

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \cos \theta = 0 \quad (43)$$

この式に式(42)を代入して積分を行うと次のようになる。

$$p = p_0 + \rho_a \cos \theta \left((1 + R F_s) (H - z) + R \int_z^H cz dz \right) \quad (44)$$

ここで、 p_0 は $z = H_0 + x \tan \theta$ の高さでの圧力 (=一定値) である。式(44)を x で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p_0}{\partial x} + \rho_a g \sin \theta (1 + R F_s) \\ &+ \rho_a R g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H cz dz \end{aligned} \quad (45)$$

このとき、 x 方向のレイノルズ方程式において、重力項と圧力勾配の項の和は次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_a R c g \sin \theta - \frac{\partial p_0}{\partial x} \\ - \rho_a R g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H cz dz &= \rho_a g I \end{aligned} \quad (46)$$

ここで、 I は無次元の圧力勾配であり、次式で表される。

$$I = R c \sin \theta - \frac{1}{\rho_a g} \frac{\partial p_0}{\partial x} - R \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} \int_z^H cz dz \quad (47)$$

ここで $\eta = z/H$ は無次元の座標である。

(b) 開水路流の場合

この場合には、水面 ($z = h$; h は水深) で圧力 (ゲージ圧) が零になることから、式(42)、(43)から圧力が次式のように求められる。

$$p = p_0 + \rho_a g \cos \theta \left\{ (1 + R F_s) (h - z) + R \int_z^h cz dz \right\} \quad (48)$$

ここで、 p_0 は大気圧であり、ゲージ圧で考えるとき、この項は零となる。式(48)を x で微分すると無次元の圧力分配 I が次のように求められる。

$$\begin{aligned} \rho_a g I &= \rho g \sin \theta \\ - \rho_a g \cos \theta &\left\{ (1 + R F_s) \frac{dh}{dx} + R \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h cz dz \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

5. 定常、等流の基礎方程式

前節までに得られた基礎方程式をもとに流れが時間的に変化せず、さらに流れが流下方向に変化しない流れ (これを等流と呼ぶ) の場合に適用する。

(1) 連続式

$$\frac{dw}{dz} = w_s \cos \theta \frac{dc}{dz} \quad (50)$$

(2) 混相の質量保存式

$$\frac{d}{dz} \rho w = \rho_s w_s \cos \theta \frac{dc}{dz} - \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} \quad (51)$$

(3) 固相の質量保存式

$$\frac{d}{dz} c w = w_s \cos \theta \frac{dc}{dz} - \frac{d}{dz} \overline{c' w'} \quad (52)$$

(4) x 方向のレイノルズ方程式

$$\begin{aligned} \rho w \frac{du}{dz} + \overline{\rho' w'} \frac{du}{dz} + \frac{d}{dz} \overline{\rho u' w'} + \frac{d}{dz} \overline{\rho' u' w} \\ + \frac{d}{dz} \overline{\rho' u' w'} = \rho_s w_s \cos \theta u' \frac{dc}{dz} + \rho g \sin \theta - \frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad (53)$$

(5) 乱れエネルギーの式

$$\begin{aligned} & \rho w \frac{dk}{dz} - k \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} + \frac{du}{dz} (\overline{\rho' u' w'} + \overline{\rho' u' w'} + \overline{\rho' u' w'}) \\ & + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \overline{p' w'} \right) \\ & = \frac{1}{2} \rho_s w_s \cos \theta \overline{u' u' \frac{dc'}{dz}} + g \sin \theta \overline{\rho' u'} \\ & - g \cos \theta \overline{\rho' w'} - \overline{p' \frac{dc'}{dz}} w_s \cos \theta - \rho \epsilon \end{aligned} \quad (54)$$

境界条件は次のようになる。

$z = z_0$ (底面) で、

$$w_0 = W_0 \quad (55)$$

$$\overline{c' w'} \Big|_{z=z_0} = w_s E_s \quad (56)$$

$z = z_1$ (境界層外縁) で、

$$w_1 = W_1 \quad (57)$$

$$\overline{c' w'} \Big|_{z=z_1} - w_s \cos \theta c_1 = -w_s \cos \theta F_s \quad (58)$$

6. 固体粒子濃度が十分小さい場合

以下の式の展開では、固体粒子の濃度が1に比べて十分小さい場合を取り扱う。このような条件は必ずしもブーシネスク近似と同じ仮定ではないことに留意する。すなわち、固体粒子の密度が流体の密度に比べてかなり大きな場合 $1 \ll c$ であるが、相対密度差 $\Delta \rho / \rho_s \gg 1$ となる場合があるからである。このような現象の代表的なものとして、雪崩、火砕流などが挙げられる。固体粒子の濃度 c が十分小さい場合、式(50)から、

$$w = 0$$

となる。また、式(53)のレイノルズ方程式において、3重相関項は2重相関項に比べて小さく無視できると考える。

すなわち、

$$|\overline{\rho' u' w'}| \gg |\overline{\rho' u' w'}| \quad (59)$$

このとき、式(53)は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \overline{\rho' u' w'} + \overline{\rho' w'} \frac{du}{dz} = \rho_s g I \quad (60)$$

乱れ運動エネルギーの式において、以下の関係が成り立つと仮定する。

$$|\overline{\rho' u' w'}| \gg |\overline{\rho' u' w'}|$$

$$|\overline{\rho' u' u' w'}| \gg |\overline{\rho' u' u' w'}|$$

上式を参照すると、乱れ運動エネルギーの式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & -(\overline{\rho' u' w'} + \overline{\rho' u' w'}) \frac{du}{dz} + k \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} \\ & - \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \overline{p' w'} \right\} \\ & - g \cos \theta \overline{\rho' w'} + \mu \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} - \rho \epsilon = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

一方向流の場合、境界層近似から、

$$|\overline{\rho' u'}| \ll |\overline{\rho' w'}|$$

が成立する。また、式(61)の第三項は次のような拡散型で近似する。

$$\frac{1}{2} \overline{\rho' u' u' w'} + \overline{p' w'} = -\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \quad (62)$$

ここで、 ν_t は渦動粘性係数であり、 σ_k 乱れ運動エネルギーに対する乱流シュミット数である。このとき、式(61)は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + P + G - \rho \epsilon = 0 \quad (63)$$

$$P = -\overline{\rho' u' w'} \frac{du}{dz} + k \frac{d}{dz} \overline{\rho' w'} \quad (64)$$

$$G = -g \cos \theta \overline{\rho' w'} \quad (65)$$

非ブーシネスク流体に対する分子粘性逸散率 ϵ に対する方程式を次のように求める。ブーシネスク流体に対する k 、 ϵ 方程式は次のように表される (Rodi¹¹)。 k 方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_* + G_* - \epsilon \quad (66)$$

ここで、 P_* 、 G_* はブーシネスク流体に対する乱れエネルギーの生成項と負の生成項であり、以下のように表される。

$$P_* = -\overline{u' w'} \frac{du}{dz} \quad (67)$$

$$G_* = -\frac{1}{\rho_s} g \cos \theta \overline{\rho' w'} \quad (68)$$

このとき、分子粘性逸散率 ϵ についての方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P_* + G_*) (1 + c_{3\varepsilon} R_{f*}) - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (69)$$

ここで、 R_{f*} はフラックス Richardson 数であり、次式で表される。

$$R_{f*} = \frac{-G_*}{P_* + G_*} \quad (70)$$

式(66)と式(69)を比較し、非ブーシネスク流体に対する ε 方程式は乱れ運動エネルギーの式(63)との比較の結果、次のように表される。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P + G) (1 + c_{3\varepsilon} R_f) - c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (71)$$

ここで、 R_f 、渦動粘性係数 ν_t は、次のように表される。

$$R_f = \frac{-G}{P + G} \quad (72)$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (73)$$

式(41)より、

$$\overline{\rho' w'} = (\rho_s - \rho_a) \overline{c' w'} = (\rho_s - \rho_a) w_s \cos \theta (c - F_s) \quad (74)$$

ここで、渦動粘性係数を $\nu_t / \sigma_\varepsilon$ とするとき、濃度・速度相関項 $\overline{c' w'}$ は次式のように与えられる。

$$\overline{c' w'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{dc}{dz} \quad (75)$$

レイノルズ応力 $-\rho \overline{u' w'}$ は次のようになる。

$$-\rho \overline{u' w'} = \rho \nu_t \frac{du}{dz} \quad (76)$$

固体粒子の濃度が小さい場合、式(60)より、

$$w = W_0 = 0 \quad (77)$$

となる。また、式(74)、(60)は、式(75)、(76)を用いると次のようになる。

$$\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{dc}{dz} = -w_s \cos \theta (c - F_s) \quad (78)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \nu_t \frac{du}{dz} \right) + \rho_a R \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{dc}{dz} \frac{du}{dz} + \rho_a g I = 0 \quad (79)$$

k 、 ε に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + P + G - \rho \varepsilon = 0 \quad (80)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \{P + (1 - c_{3\varepsilon})G\} - c_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (81)$$

ここで、乱れの生成項 P 、乱れの負の生成項 G は、式(75)、(76)を用いて次のように表される。

$$P = \rho \nu_t \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - k \rho_a R \frac{d}{dz} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{dc}{dz} \right) \quad (82)$$

$$G = g \cos \theta \rho_a R \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{dc}{dz} \quad (83)$$

境界条件は次のようになる。

$z = z_0$ (底面) で、

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z_0}{k_s} + Ar \quad (84)$$

$$\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{dc}{dz} = -w_s E_s \quad (85)$$

$$\frac{k}{u_*^2} = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}} \quad (86)$$

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z_0} \quad (87)$$

$z = z_1$ で、

$$\frac{du}{dz} = \frac{dk}{dz} = \frac{d\varepsilon}{dz} = 0 \quad (88)$$

7. 方程式の無次元化

前節で得られた連立常微分方程式を数値的に解くために、諸変数を無次元化する。無次元変数にはテイルダ(\sim)を付けることにする。特性速度を摩擦速度 $u_{*0} = \sqrt{\tau_0 / \rho_a}$ 、特性長さを境界層厚 d (開水路の浮遊砂流の場合、水深 h とする)、底面濃度 c_b (c_0) とし、諸変数を次のように表す。

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} u_{*0} & w &= \tilde{w} u_{*0} & c &= \tilde{c} c_b \\ k &= \tilde{k} u_{*0}^2 & \varepsilon &= \tilde{\varepsilon} \frac{u_{*0}^3}{d} & z &= \tilde{z} d \\ \nu_t &= \tilde{\nu}_t u_{*0} d & \rho &= \tilde{\rho} \rho_a & F_s &= \tilde{F}_s c_b \end{aligned} \quad (89)$$

このとき、固相の質量保存式、流下方向のレイノルズ方程式、 k 方程式、 ε 方程式は次のように無次元化される。

$$\tilde{\nu}_t \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} = -\frac{1}{Z}(\tilde{c} - \tilde{F}_s) \quad (90)$$

ここで、 Z は次に示されるような無次元パラメータである。

$$Z = \frac{u_{*0}}{\sigma_w s \cos \theta} \quad (91)$$

流下方向のレイノルズ方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \tilde{\nu}_t \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} \right) + \chi \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{\tilde{c}}{\tilde{z}} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} + 1 + R \tan \theta \tilde{c} = 0 \quad (92)$$

k 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{k}}{d\tilde{z}} \right) + \tilde{P} + R_t \tilde{G} - \tilde{\rho} \tilde{\epsilon} = 0 \quad (93)$$

ここで、 \tilde{P} 、 \tilde{G} は、それぞれ、無次元の乱れエネルギー生成項、無次元の乱れエネルギーの負の生成項であり、次式のように表される。

$$\tilde{P} = (1 + \chi \tilde{c}) \tilde{\nu}_t \left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} \right)^2 - \chi \tilde{k} \frac{d}{d\tilde{z}} \left(\frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} \right) \quad (94)$$

$$\tilde{G} = \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} \quad (95)$$

ここで、 R_t はリチャードソン数であり次式で与えられる。

$$R_t = \frac{R c_b g \cos \theta d}{u_*^2} \quad (96)$$

ϵ 方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\tilde{z}} \right) + c_{1\epsilon} \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \{ \tilde{P} + (1 - c_{3\epsilon}) R_t \tilde{G} \} - c_{2\epsilon} \tilde{\rho} \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} \quad (97)$$

ここで、 $\tilde{\rho}$ 、無次元のレイノルズ応力、無次元の濃度速度相関、無次元の渦動粘性係数 $\tilde{\nu}_t$ 、無次元パラメータ χ は、次のように表される。

$$\tilde{\rho} = 1 + R c_b \tilde{c} = 1 + \chi \tilde{c} \quad (98)$$

$$-\overline{u'w'} = \tilde{\nu}_t \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} \quad (99)$$

$$-\overline{\rho'w'} = -\chi \tilde{c}' \tilde{w}' = \chi \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{z}} \quad (100)$$

$$\tilde{\nu}_t = c_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (101)$$

$$\chi = R c_b \quad (102)$$

境界条件は次のように無次元化して表される。

$\tilde{z} = \tilde{z}_0$ で、

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{u}_{*0}}{\kappa} \ln \frac{\tilde{z}_0}{k_s} + A s \quad (103)$$

$$\tilde{c} = 1 \quad (104)$$

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{u}_{*0}^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (105)$$

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{u}_{*0}^3}{\kappa \tilde{z}_0} \quad (106)$$

$\tilde{z} = 1$ で、

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{k}}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{\epsilon}}{d\tilde{z}} = 0 \quad (107)$$

以上において、主たる未知数は \tilde{u} 、 \tilde{c} 、 \tilde{k} 、 $\tilde{\epsilon}$ であり、式(90)、(92)、(93)、(97)を基礎方程式として、境界条件式(103)から(107)のもとで数値計算を行った。得られた無次元量から次元量に変換することができる。

8. 吹雪の流動解析に対する応用

以上で得られた、非ブーシネスク $k-\epsilon$ 乱流モデルを吹雪の流動解析に適用する。この場合、固体粒子である雪粒子の密度は周囲流体である空気の密度に比べて非常に大きい。従って雪粒子の濃度が1%以下であっても雪-空気混相流においてはブーシネスク近似は妥当ではない。今、気温が0°の場合を考える。純氷の密度 $\rho_i = 917.0 \text{ kg/m}^3$ であり、空気の密度は $\rho_a = 1.293 \text{ kg/m}^3$ である。今雪粒子の密度 ρ_s が純氷の密度の50%であるとき、空気中の相対比重 $R = (\rho_s - \rho_a) / \rho_a = 353.6$ である。従って、雪粒子の体積濃度が0.1%以下であっても吹雪中での密度は空気の密度に比べてかなり大きい ($\chi = R c_b = 0.35$)。このような条件ではブーシネスク近似を適用することはできない。

吹雪の計算では、雪粒子の静止空気中での沈降速度 w_s を見積もる必要がある。ここでは、雪粒子が見かけの密度 $\rho_s = 0.5 \times \rho$ をもつ球形であるものとする。球に関する抵抗係数 c_D の式として、Schillerの式 (Graff⁽¹⁰⁾)

$$c_D = \frac{Re}{24} (1 + 0.150 Re^{0.687}) \quad (108)$$

を用いた。ここで、 Re は球の半径 a を用いて、次式で定義されるレイノルズ数である。

$$Re = \frac{2aw_s}{\nu} \quad (109)$$

Table 1 Diameter and terminal velocity in air of snow particles used in the simulation model.

	$\theta = 0^\circ$			$\theta = 30^\circ$		
c_b	0.01	0.03	0.05	0.01	0.03	0.05
$D_s(\text{mm})$	0.08			0.12	0.16	0.18
$w_s(\text{m/s})$	0.0852			0.174	0.277	0.332

Table 2 Coefficients of $k-\epsilon$ turbulence model.

C_μ	σ_k	σ_ϵ	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$	$C_{3\epsilon}$	σ_ϵ
0.09	0.1	1.3	1.44	1.92	0.8	1.0

静止空気中での雪粒子に作用する力の釣り合い方程式により、反復計算を行って沈降速度 w を計算した。

$$c_D a^2 \pi \rho \frac{1}{2} w_s^2 = \frac{4a^2 \pi}{3} (\rho_s - \rho_a) g \quad (110)$$

計算では、雪粒子の直径 D_s を与え、式(108)–(110)により沈降速度を計算した。計算に用いた雪粒子の直径と沈降速度を Table 1 にまとめて示す。

非ブーシネスク $k-\epsilon$ 乱流モデル中には幾つかのモデル定数が含まれる。ここではそれらがブーシネスク流体の値と等しいと考え、Table 2 の値を用いた。

以下に計算結果を示す。Fig. 2 に、斜面の傾斜角 $\theta = 0^\circ$ の場合の流速分布と濃度分布の計算結果を示す。ここで、底面での体積濃度 c_b を0.01%、0.03%、0.05%とした。いずれのケースにおいても流速は上方に向かって次第に増加しており、底面濃度が大きいほど僅かに流速が大きくなっている。流速の大きさは最大で13~15 m/s 程度である。雪粒子の濃度は底面付近で上方に向かって従って急激に減少していることがわかる。Fig. 3 には、 $\theta = 0^\circ$ の場合の無次元の乱れエネルギー (\bar{k})、分子粘性逸散率 (ϵ)、渦動粘性係数 ($\bar{\nu}$) の計算結果を示す。 \bar{k} は底面付近で急激に減少した後、上方に向かって緩やかに減少している。この領域では底面濃度の違いによる \bar{k} の違いは大きくはない。 $\bar{\nu}$ は底面付近から上方に向かって次第に大きくなり、 $\bar{z}=0.5$ 付近で最大となった後、減少してゆく。 $\bar{\nu}$ の最大値は底面濃度が大きいほど小さい。

このように、吹雪の場合に、底面濃度が大きいほど流速が大きくなることが示された。これは雪粒子を浮遊することで、乱れエネルギーを多く消費し、渦動粘性係数が小さくなり、その結果流速勾配が大きくなったものである。同様な結果は開水路の浮遊砂流でも観

察されており、カルマン定数 κ の減少として知られているものである (志村¹¹⁾、日野¹²⁾)。

Fig. 4, 5 に傾斜角 $\theta = 30^\circ$ の場合の計算結果を示す。この場合には、底面濃度 c_b が大きくなるに従って、流速分布、濃度分布が顕著に大きくなる。 $c_b=0.01\%$ 、 0.03% 、 0.05% の場合で $u_{max}=35, 55, 75 \text{ m/s}$ ほどになっている。この場合には底面が傾斜しているため、雪粒子の重さの流下方向成分のため、流速が大きくなったものである。 $k, \epsilon, \bar{\nu}$ の値は、水平床の場合に比べて相当大きくなっている。これは重力の斜面方向成分が作用するため、摩擦速度 u_* が大きくなり、それがこれらの値に反映されたためである。

傾斜角が $\theta = 30^\circ$ の場合には、急な斜面を想定し、そこでの吹雪がある場合の流速がどれくらいになるかを検討したものである。Fig. 4, 5 から明らかなように、傾斜角が大きくなると、重力の斜面方向成分のため、流速が著しく大きくなる。これにより、雪崩特に煙型の雪崩の発生機構として、急斜面上の積雪が風によって巻き上げられ、更に自身の重さのため大きな流速となり、流下方向に加速し雪崩が形成される機構のあることが示唆される。

これまで、固気二相流が非ブーシネスク流体となる場合についてのモデル化を検討してきた。それではどのような場合にブーシネスク近似が破綻し、非ブーシネスク流体として取り扱うことが必要であるか検討したその結果をFig. 6, 7 に示す。ここで、ブーシネスク近似を用いた計算をブーシネスク計算、ブーシネスク近似を用いない計算を非ブーシネスク計算と呼ぶ。傾斜角が $\theta = 0^\circ$ の場合 (Fig. 6)、 $\theta = 30^\circ$ の場合 (Fig. 7) の何れも、底面濃度 $c_b=0.03\%$ で両者の差が現れている。 $c_b=0.05\%$ ではブーシネスク計算の流速が非ブーシネスク計算に比べ2割ほど大きな値を示している。

9. 結 論

固体粒子を含む流れを非ブーシネスク流れに対し適用可能な $k-\epsilon$ 乱流モデルを発展させた。基礎方程式系は、連続式、固体粒子の質量保存式、レイノルズ方程式、乱れエネルギー (k) の方程式、分子粘性逸散率 (ϵ) の方程式で構成される。このうち、 k 及び ϵ 方程式は、前報の式を修正したものである。いずれの方程式でも混合流体の密度が周囲流体の密度とほぼ等しいか、あるいは、かなり大きくなる場合をモデル化しており、ブーシネスク近似は用いていない。

本モデルを傾斜している平面上の吹雪の流動解析に

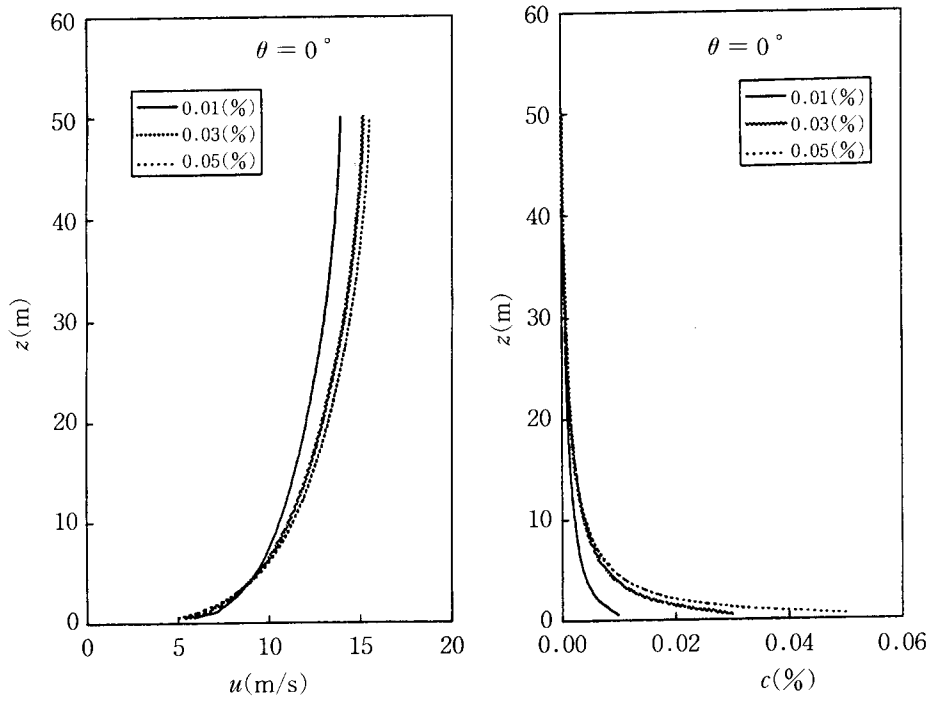


Fig. 2 Velocity and concentration profiles of snow drift on the horizontal plane ($\theta = 0^\circ$).

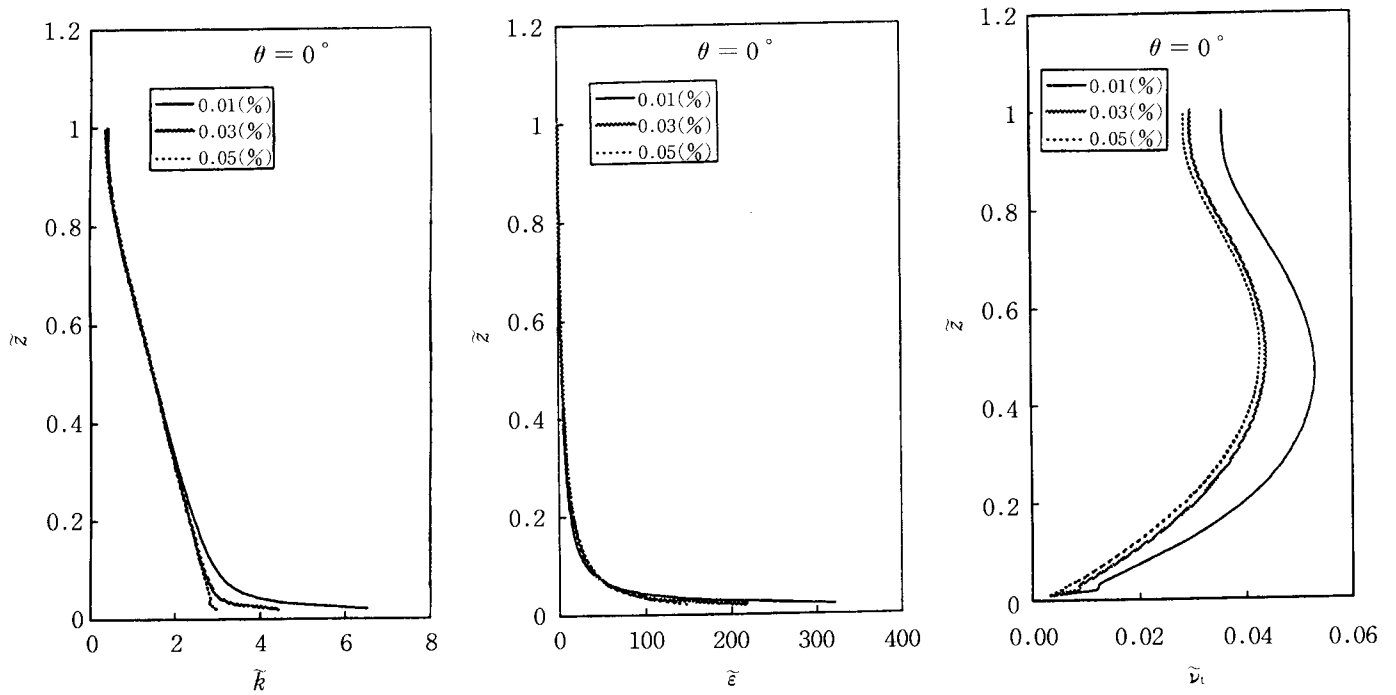


Fig. 3 Profiles of the kinetic energy of turbulence, the viscous dissipation rate of turbulence and the eddy viscosity of snow drift on the horizontal plane ($\theta = 0^\circ$).

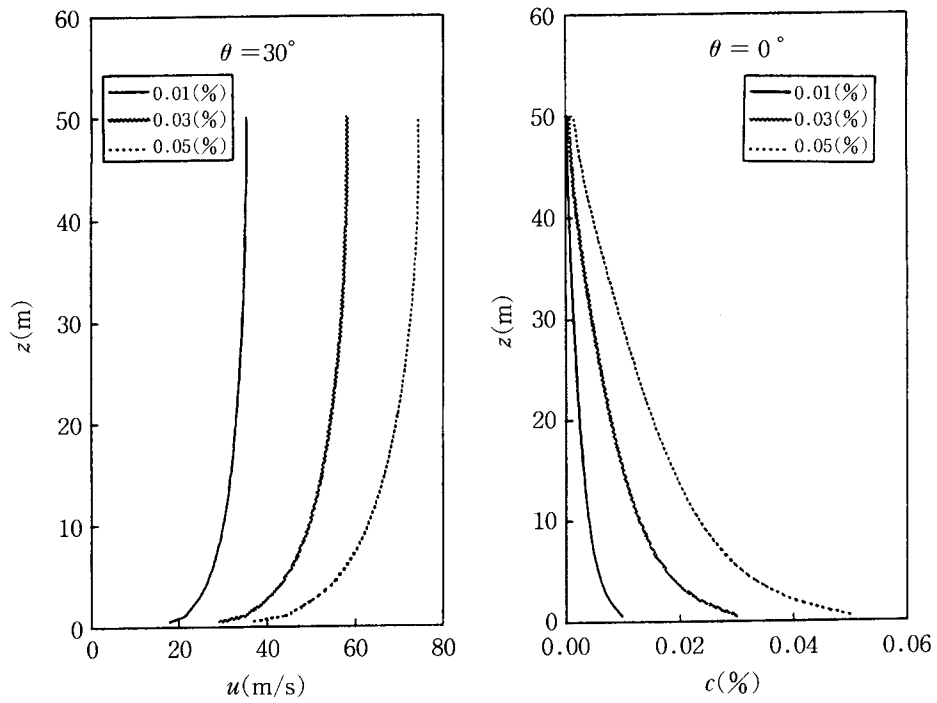


Fig. 4 Velocity and concentration profiles of snow drift on the inclined plane ($\theta = 30^\circ$).

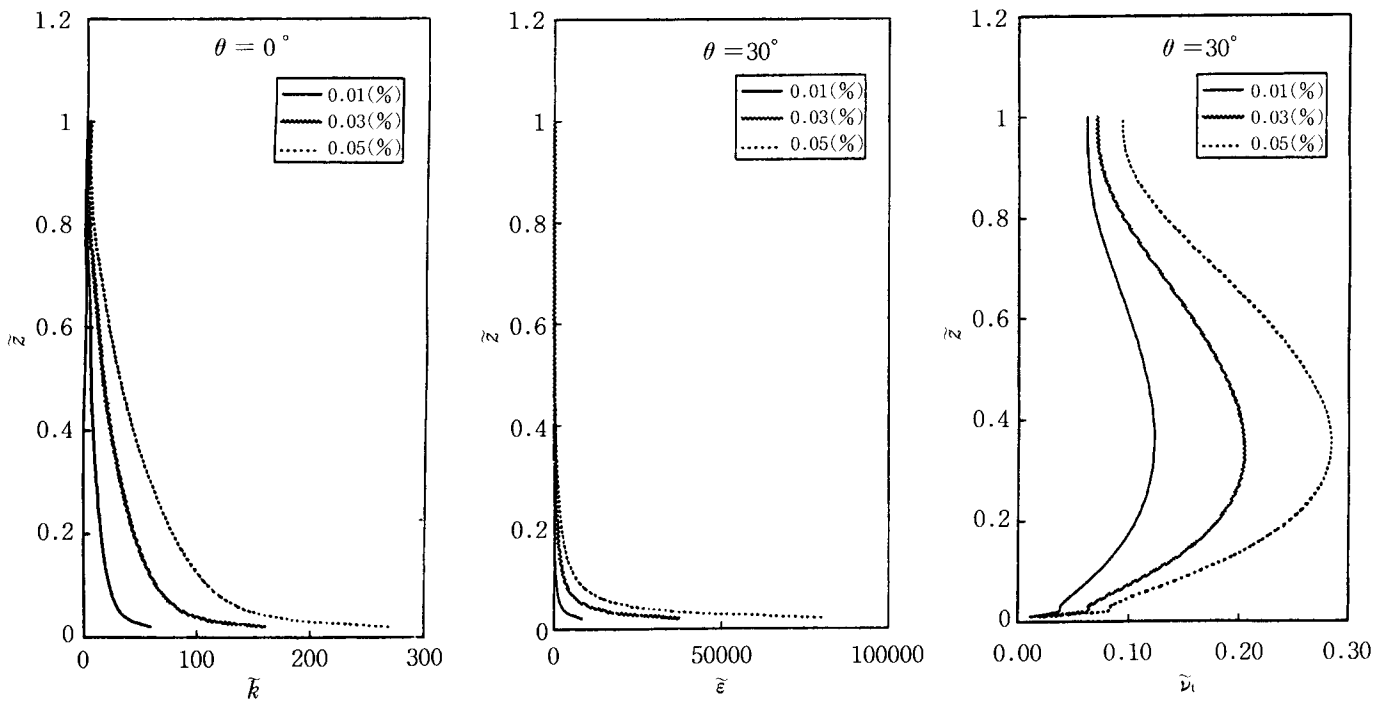


Fig. 5 Profiles of the kinetic energy of turbulence, the viscous dissipation rate of turbulence and the eddy viscosity of snow drift on the inclined plane ($\theta = 30^\circ$).

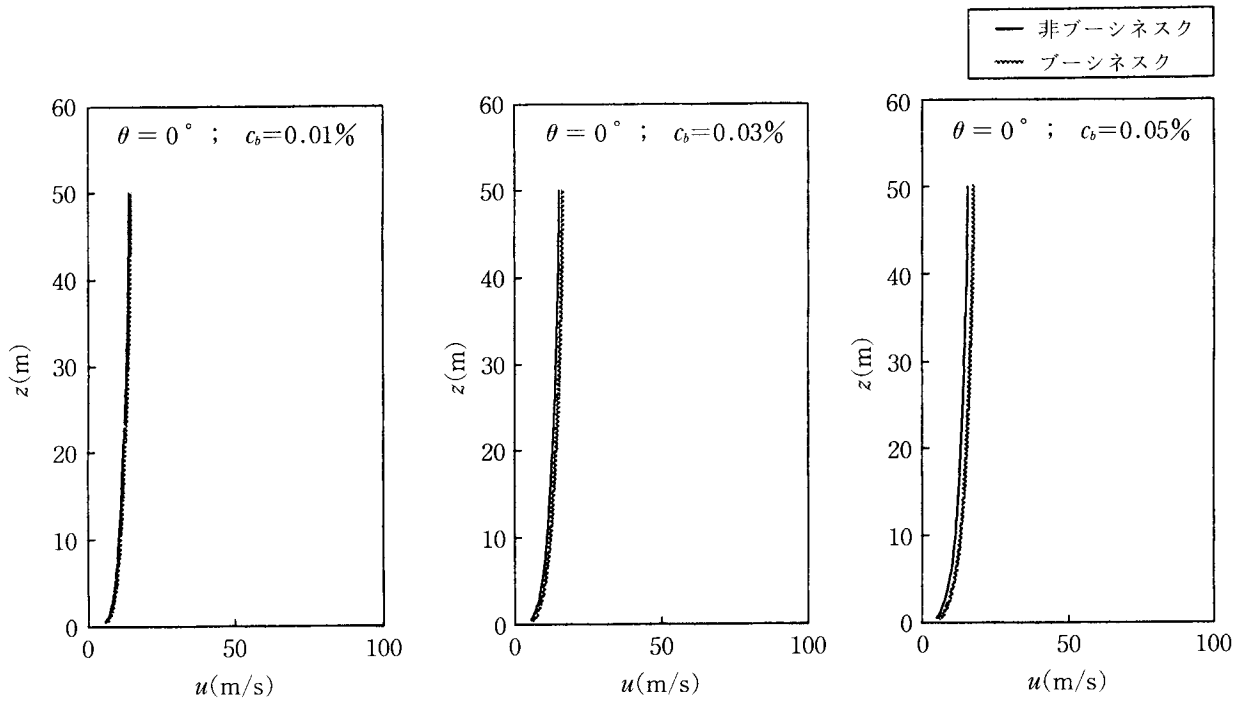


Fig. 6 Comparison of the non-Boussinesq and the Boussinesq calculations in the case of $\theta = 0^\circ$.

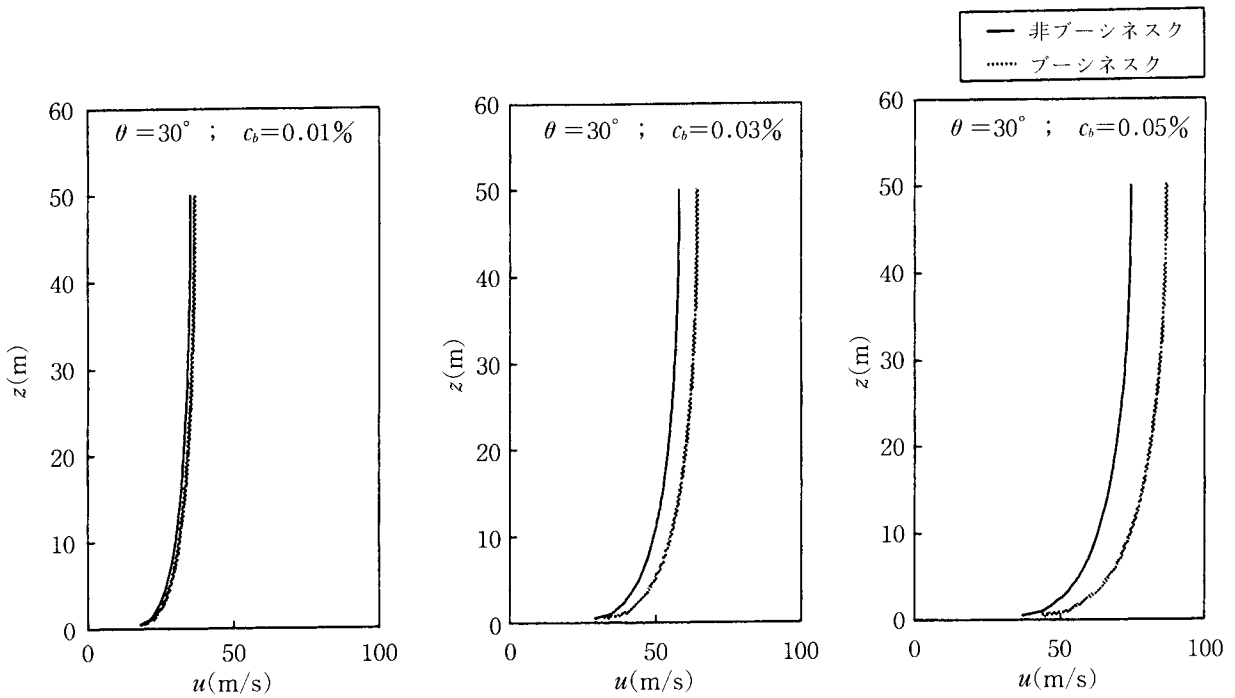


Fig. 7 Comparison of the non-Boussinesq and the Boussinesq calculations in the case of $\theta = 30^\circ$.

適用した。斜面の傾斜角を 0° , 30° の場合について数値解析を行った。その結果、傾斜角が 0° の場合には、底面濃度の増加に伴って、流速が若干増加することを示した。これは、従来開水路の浮遊砂流で指摘された現象と同じである。また、傾斜角が 30° の場合には、底面濃度の増加に伴って流速が大きく増加することを示した。これは、濃度の増加に伴って斜面方向の重力成分が増加することに対応する。

さらに、同じ斜面の傾斜角について、ブーシネスク近似を用いて計算を行い、非ブーシネスク計算との比較を行った。この結果、 $\theta = 0^\circ$, $\theta = 30^\circ$ のいずれの場合もブーシネスク近似が許される限界が $c_b = 0.03\%$ 以下の底面濃度であることを示した。

本研究の数値計算では本学大学院修士生野口和義君（現在(株)ニュージェック）の助力を得た。ここに記して、深甚なる感謝の意を表します。また、本研究の一部は、文部省科学研究費、基盤研究（C）（課題番号 09650563）の補助を受けた。ここに期して、感謝します。

参考文献

- 1) Rodi, W., : Turbulent models and their application, State of the Arts Paper, IAHR, 1980.
- 2) DeVantier, B.A. and B.E. Larock, Sediment transport in stratified turbulent flow, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol.109, No.12, pp.1622-1635, 1983.
- 3) 福嶋祐介, 開水路浮遊砂流の乱流構造の解析, 第30回水理講演会論文集, 第30巻, pp.631-636, 1986.
- 4) 福田正晴, 福嶋祐介, 浮遊砂流に対する $k-\epsilon$ 乱流モデルの適合性について, 第31回水理講演会論文集, 第31巻, pp.587-591, 1987.
- 5) 藤崎一裕, 高崎秀一, 浮遊砂を伴う開水路流れの解析, 水工学論文集, 第41巻, pp.813-818, 1997.
- 6) 小林俊一, 降雪時の吹雪空間密度の高度分布式, 低温科学, Ser. A 43, pp.79-83, 1984.
- 7) 小林俊一, 吹雪時の雪粒子の移動と限界, 地学雑誌, 100(2), pp.240-249, 1991.
- 8) Uematsu, T., Nakata, T., Takeuchi, K, Arisawa, Y. and Kaneda, Y., Three-dimensional numerical simulation of snowdrift, Cold Region Science and Technology, Vol.20, pp.65,73, 1991.
- 9) 福嶋祐介, 固体粒子を浮遊する非ブーシネスク流の $k-\epsilon$ 乱流モデルによる数値解析法の提案, 長岡技術科学大学研究報告, 第19号, pp.13-24, 1997.
- 10) Graf, W.H. Hydraulics of Sediment Transport, Water Resources Publications, p.42, 1984.
- 11) 志村博康, 流砂ある水流の諸特性について, 土木学会論文集, 第46号, 1657.
- 12) 日野幹雄, 固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 第92号, pp.11-20, 1963.

1) Rodi, W., : Turbulent models and their application,