

# 複雑な境界条件を持つ開水路一次元不定流の基礎方程式について

福嶋 祐介\*

Basic Equations for One-Dimensional Unsteady Flow with Complex Boundary Conditions

Yusuke FUKUSHIMA

**Abstract:** The set of the equations for an open channel unsteady flow with the complex boundaries is derived. The basic equations for such flow are usually obtained from the momentum equations or the Bernoulli equation. However, these treatment cannot take into account the complex flow conditions such that inflow from and outflow to banks, rainfall from above and ground water onto the bed. In this paper, the basic equations are obtained strictly by the integrations of the Reynolds equations and the equation of the kinetic energy of mean flow considering the boundary conditions. In these treatment, the main assumptions used in the derivation of the basic equations for the open channel flow are clarified. The equations of the water surface form in more simple cases are deduced from the set of the equations for the general case based on the Reynolds equations or the equation of the kinetic energy of mean flow.

**Key Words :** unsteady flow, open channel flow, one-dimensional analysis, complex boundary conditions

## 1. 序 論

1998年8月4日、著者の住む新潟県で未曾有の洪水に見舞われた。特に新潟市内では、降水が道路上を川のように流れ、多くの道路が冠水し車での走行に対しても大きな障害となった。この洪水は市街地では、網目状の道路に水が流れ、最大時間雨量が200 mm/hにも達したことが特徴である。また、水位が大きくなったことから、地下への浸透もかなりあったものと推定された。著者はこのような特徴をもつ洪水についてこれまで十分な検討がなされなかったことに気づいた。特に、道路や河川のそれぞれの区間で小規模な単位で構成されこれらが全体のシステムとなることが重要ではないかと気づいたのである。

河川のような任意の断面を持つ水路に水が流れ、表面が大気と接している流れを開水路流れと呼ぶ。河川は我々人間の生活と密着しており、上水道や農業用水、工業用水などの供給源である。一方、台風や集中豪雨などの際には河川は氾濫し、大規模な災害となることもある。従って、このような河川内の流れを知るためには開水路流れの特性を知ることが必要である。河川内では水の流動は様々な境界条件に影響される。すなわち、水路の勾配の変化、断面積の拡大や縮小、側面からの流入や流出、水面からの降雨、底面から地下への浸透などである。しかし、従来の定式化ではこれらは十分に考慮されていないようである。一般には開水

路の流れを記述する方程式は摩擦を考慮したベルヌイ式や運動量保存則から求めることが多い。このような解析では開水路に対する境界条件の違いを厳密に評価することは困難である。ここでは厳密に乱流に対するレイノルズ方程式と平均流の運動エネルギー方程式の2つの式を用いて、それぞれに対して層積分法と断面積積分法を用いて、開水路流の基礎方程式を導く。特に式の誘導にあたってどのような仮定が用いられるかに留意した。また種々の境界条件の違いを十分反映した定式化を行うことを目指した。得られた基礎方程式では、水路断面の拡大、縮小や水面の上方からの降雨、底面から下方への浸透、側面からの流出、流入を考慮している。

## 2. 開水路流解析の基本的な考え方

境界層理論は元来、広い領域におかれた物体の解析を行うため、物体のごく近傍でのみ粘性の影響が顕著であり、それ以外の領域では非粘性であるとする考え方である。これにより、壁面近傍の流れや噴流や後流などの自由流れの解析が可能になった。水理学の分野でもこの境界層理論はしばしば用いられている。対象とする流れによって、古典的な境界層理論はさらに拡張して用いられる。本論文が対象とする河川の流れの解析では、流れの領域は有限であり、流下方向の変化は水深方向、横方向の変化よりも緩やかである。このうち特に流線の曲率が小さい場合、圧力は静水圧分布で近似でき、流れは漸変流として取り扱われる。このような漸変流ではしばしば境界層近似が成立するとし

原稿受付：平成11年5月18日

\*長岡技術科学大学・環境・建設系

て解析される。

河川のような流れでは、横方向の流れの長さスケール  $B$  と水深方向の長さスケール  $h$  は大きく違うのが普通である。たとえば長岡近郊での信濃川のような大規模河川では、洪水時に川幅  $B$  が 1000m、水深  $h$  が 5m となることがある。このとき、アスペクト比  $h/B$  は  $5/1000=1/200$  の大きさである。中小規模の河川でも水深と川幅の比はこのような値となることが多い。このような流れでは液膜のような問題と同様、水深方向の流れの変化は小さく、横方向の変化が重要であり、浅水流の仮定の下で解析を行うことが多い。このような近似は、特に底面近傍の凹凸が問題になる場合は当然成立せず、流れの解析では鉛直二次元あるいは三次元の取り扱いが必要である。また、アスペクト比が小さい流れであっても断面内の二次流とか底面近傍の流れを知りたいような場合にも当然三次元解析が必要である。しかし、流れの三次元解析手法は、現在に至っても確立されていないし、そのような解析は現在のところ実用的ではない。

また降雨や地下浸透、水路の側面からの流出、流入を含む流れの解析も厳密に考えるならば、三次元流れである。しかし、主流の流量に比べて 5% 以下の流量が降雨、地下浸透として、水路の側方からの流出入がある場合には、近似的に主流が卓越していると考えることができ、近似的に境界層近似を用いることができる。水理学で漸変流の近似ができるのは、主流方向の流れがこれと直角方向の流れに対して卓越している場合である。このとき、境界層近似では主流方向のせん断応力項、拡散項を他のせん断応力項や拡散項に比べて無視する。このような考え方は、はじめに提案された境界層近似の考え方をさらに発展させたものである。

流れのレイノルズ数が大きく、十分に発達した乱流では、分子粘性に起因するせん断応力はレイノルズ応力に比べて十分に小さいことから通常これを無視することが多い。この場合には粘性の影響は乱れ成分、すなわちレイノルズ応力を通じて考慮しているものと解釈される。また、本研究のような平均流のエネルギー方程式を用いる場合には、粘性の効果は乱れの生成項を通して考慮される。つまり、これらの場合、式の上では見かけ上粘性の項は現れていないが、粘性の影響はレイノルズ応力や乱れの生成項を通じて間接的に考慮されることになる。先に述べたように、開水路の漸変流では流れの全領域が境界層である。従って、底面から水面に至る流れの領域が境界層になっていることに留意されたい。

本研究では、境界層の近似解析法の考え方(Schlichting,

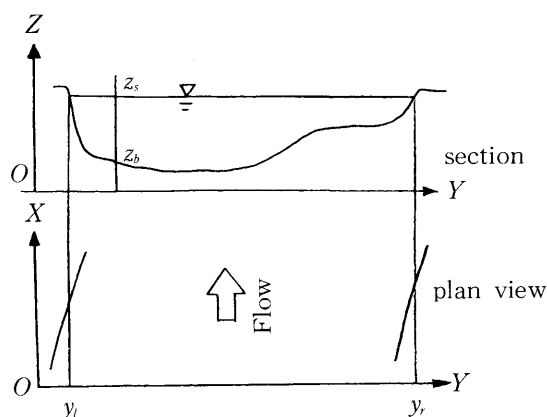


図1 開水路流れの模式図と記号

1979, 日野, 1992)に基づき、流速分布が相似分布で表されると考えて、質量保存式、レイノルズ方程式、平均流のエネルギー方程式の層積分、また断面積分を行い、最終的に開水路の一次元不定流方程式を導く。

### 3. 流れの基礎方程式

図1に示すように一般的な断面形状の断面をもつ開水路流れを考える。レイノルズ数は大きく、流れは十分発達した乱流である場合を解析の対象とする。デカルト座標系を  $(x, y, z)$  とする。基礎方程式をテンソル形式で書く。座標系をテンソル表示で  $x_i$  と表す。ここで、 $x_1=x$ ,  $x_2=y$ ,  $x_3=z$  とする。水面を  $z_s$ 、底面を  $z_b$  で、水路の左岸の位置を  $y_l$ 、右岸を  $y_r$  で表すことにする。以下でいう層積分とは  $z_b \leq z \leq z_s$  の範囲の積分であり、これに加えて  $y_l \leq y \leq y_r$  の積分を行うことにより断面積分を行うことになる。流速成分を  $\hat{u}_i$  とする。すなわち、 $x, y, z$  方向の流速成分を  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  とするとき、 $\hat{u}_1=\hat{u}$ ,  $\hat{u}_2=\hat{v}$ ,  $\hat{u}_3=\hat{w}$  である。圧力を  $\hat{p}$  とする。また、開水路流れにおいて、流れが固体粒子を含む場合を想定する。水だけの単相の流れは固体粒子の体積濃度  $\hat{c}$  が零の特別な場合として含まれる。固相と液層の質量保存式、混層流体に対する運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{c} \hat{u}_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (1-\hat{c})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (1-\hat{c}) \hat{u}_i = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_j \hat{u}_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

ここで、 $t$  は時間、 $g_i$  は $x_i$ 方向の重力加速度成分、 $\rho$  は水の密度、 $\nu$  は動粘性係数である。また $\hat{(\ )}$ はそれぞれの量の瞬間値であることを意味する。乱流に対する基礎方程式を求めるため、レイノルズの分解を行う。

$$\hat{c} = c + c' \quad (4)$$

$$\hat{u}_i = u_i + u'_i \quad (5)$$

$$\hat{p} = p + p' \quad (6)$$

ここで、 $c$  が平均体積濃度、 $u_i$  が平均流速成分、 $p$  が平均圧力、 $c'$  が体積濃度の変動成分、 $u'_i$  が流速の変動成分、 $p'$  が圧力の変動成分である。式(4)、(5)、(6)を式(1)、(2)、(3)に代入し、平均操作を行うと次式を得る。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} c u_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{c' u'_i} \quad (7)$$

$$\frac{\partial (1-c)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (1-c) u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{c' u'_i} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (9)$$

ここで、 $\overline{c' u'_i}$  は濃度速度相関、 $-\overline{u'_i u'_j}$  はレイノルズ応力である。先にも述べたように、レイノルズ数が大きく十分発達した乱流の場合、式(9)の右辺第三項のレイノルズ応力は第四項の粘性応力に比べて十分大きく、粘性応力を無視できる。この場合には式(9)は次式で近似できる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} \quad (10)$$

一方、式(7)と式(8)の和をとれば、連続式として次式を得る。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

これはもちろん一様流体の連続式に他ならない。

以上の式(7)、(8)、(10)の断面積分を行うことにより、一次元の開水路流れの基礎方程式である不定流方程式を導く。また、運動量方程式であるレイノルズ方程式に加えてこれを元に導いた平均流のエネルギー方程式を導き、これを断面積分した一次元不定流方程式をも導く。

#### 4. 連続式の層積分と断面積分

開水路の流れでは、流下方向の変化は水平方向、鉛

直方向の変化に対して緩やかで境界層近似が成り立つ。このとき、式(7)、(8)は次のように成分で書き表すことができる。以下ではまず質量保存式の層積分、断面積分した方程式を誘導する。レイノルズ方程式及び平均流のエネルギー方程式の層積分、断面積分は以下の質量保存式の誘導方法と同様のやり方で求めることができる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u}{\partial x} + \frac{\partial c v}{\partial y} + \frac{\partial c w}{\partial z} = - \frac{\partial \overline{c' v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{c' w'}}{\partial z} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (1-c)}{\partial t} + \frac{\partial (1-c) u}{\partial x} + \frac{\partial (1-c) v}{\partial y} + \frac{\partial (1-c) w}{\partial z} \\ = \frac{\partial \overline{c' v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{c' w'}}{\partial z} \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)を $z_b \leq z \leq z_s$ の範囲で積分する。

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{z_s} \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u}{\partial x} + \frac{\partial c v}{\partial y} + \frac{\partial c w}{\partial z} \right) dz \\ = \int_{z_b}^{z_s} \left( - \frac{\partial \overline{c' v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{c' w'}}{\partial z} \right) dz \end{aligned} \quad (14)$$

この式の左辺の積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} (14) \text{の左辺} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} c dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} c u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} c v dz \\ &\quad - \frac{\partial z_s}{\partial t} c_s - \frac{\partial z_s}{\partial x} c_s u_s - \frac{\partial z_s}{\partial y} c_s v_s + c_s w_s \\ &\quad + \frac{\partial z_b}{\partial t} c_b + \frac{\partial z_b}{\partial x} c_b u_b + \frac{\partial z_b}{\partial y} c_b v_b - c_b w_b \end{aligned} \quad (15)$$

運動学的境界条件は水面 $z_s$ と底面 $z_b$ において、それぞれ、次のようになる。

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s = w_{se} \quad (16)$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b = w_{be} \quad (17)$$

この式(16)で、水面からの水の供給 $w_{se}$ が零の場合、水面が流線となることを意味する。また式(17)で底面からの水の流出 $w_{be}$ が零の場合も底面が流線となることを意味する。 $w_{se}$ と $w_{be}$ を考慮する点が本研究独自の解析の要点である。式(16)、(17)を式(15)に代入すると式(14)は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{z_i} c \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_s}^{z_i} cu \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_s}^{z_i} cv \, dz - w_{se} c_s + w_{be} c_b = - \int_{z_s}^{z_i} \frac{\partial}{\partial y} \overline{c'v'} \, dz - \overline{c'w'}|_{z=z_i} + \overline{c'w'}|_{z=z_s} \quad (18)$$

ここで、 $-\overline{c'w'}|_{z=z_i} = 0$  であるから上式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{z_i} c \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_s}^{z_i} cu \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_s}^{z_i} cv \, dz = w_{se} c_s - w_{be} c_b - \int_{z_s}^{z_i} \frac{\partial}{\partial y} \overline{c'v'} \, dz + \overline{c'w'}|_{z=z_s} \quad (19)$$

同様の積分を式(13)について行くと次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{z_i} (1-c) \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_s}^{z_i} (1-c)u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_s}^{z_i} (1-c)v \, dz = w_{se}(1-c_s) - w_{be}(1-c_b) + \int_{z_s}^{z_i} \frac{\partial}{\partial y} \overline{c'v'} \, dz - \overline{c'w'}|_{z=z_s} \quad (20)$$

式(19)と式(20)を足し合わせると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{z_i} dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_s}^{z_i} u \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_s}^{z_i} v \, dz = w_{se} - w_{be} \quad (21)$$

以上のように得られた、式(19)、(20)、(21)が質量保存式の層積分方程式である。このうち、 $w_{se}$ を含む項は水面からの水の供給を、 $w_{be}$ を含む項は底面から下への水の流出を表したものである。通常この二つの項は無視される。一般の河川流を考えるとこの二つの項に対応するのは降雨と地下への浸透であり、今回の式の誘導で初めて考慮される項である。

式(19)、(20)、(21)は後述する浅水流方程式と組み合わせると、平面二次元の洪水流解析に用いられる。

以下では、一次元の運動方程式や平均流のエネルギー方程式と組み合わせると不定流解析で用いられる一次元連続式を以下のように求める。式(19)は  $z$  方向の層積分方程式であるからさらにこれを  $y_l \leq y \leq y_r$  の範囲で積分することにより断面積分を行うことができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} c \, dz \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} cu \, dz \, dy \\ & - \frac{\partial y_r}{\partial t} \int_{z_s}^{z_i} c_r \, dz - \frac{\partial y_l}{\partial x} \int_{z_s}^{z_i} c_l \, dz + \int_{z_s}^{z_i} c_r v_r \, dz \\ & + \frac{\partial y_l}{\partial t} \int_{z_s}^{z_i} c_l \, dz - \frac{\partial y_r}{\partial x} \int_{z_s}^{z_i} c_r \, dz + \int_{z_s}^{z_i} c_l v_l \, dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \int_{y_l}^{y_r} w_{se} c_s \, dy - \int_{y_l}^{y_r} w_{be} c_b \, dy \\ & - \int_{z_s}^{z_i} \frac{\partial}{\partial y} \overline{c'v'}|_{y=y_l}^{y=y_r} \, dz + \int_{y_l}^{y_r} \overline{c'w'}|_{z=z_s} \, dy \quad (22) \end{aligned}$$

ここで、 $y=y_r$  と  $y=y_l$  での境界条件は次のように与えられる。

$$\frac{\partial y_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial y_r}{\partial x} - v_r = V_r \quad (23)$$

$$\frac{\partial y_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial y_l}{\partial x} - v_l = -V_l \quad (24)$$

式(23)の  $V_r$ 、式(24)の  $V_l$  は水路の横方向の流出、流入の速度であり、流出を正としている。もしこれらが零の場合には、この二つの式は水路の側面が流線なることを意味している。式(23)と式(24)を式(22)に代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} c \, dz \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} cu \, dz \, dy \\ & = \int_{z_s}^{z_i} c_r V_r \, dz + \int_{z_s}^{z_i} c_l V_l \, dz + \int_{y_l}^{y_r} w_{se} c_s \, dy - \int_{y_l}^{y_r} w_{be} c_b \, dy \\ & - \int_{z_s}^{z_i} \overline{c'v'}|_{y=y_l} \, dz + \int_{z_s}^{z_i} \overline{c'v'}|_{y=y_r} \, dz + \int_{y_l}^{y_r} \overline{c'w'}|_{z=z_s} \, dy \quad (25) \end{aligned}$$

これと同様にして、式(20)は次のように積分される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} (1-c) \, dz \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} (1-c)u \, dz \, dy \\ & = \int_{z_s}^{z_i} (1-c_r) V_r \, dz + \int_{z_s}^{z_i} (1-c_l) V_l \, dz \\ & + \int_{y_l}^{y_r} w_{se} (1-c_s) \, dy - \int_{y_l}^{y_r} w_{be} (1-c_b) \, dy \\ & + \int_{z_s}^{z_i} \overline{c'v'}|_{y=y_l} \, dz - \int_{z_s}^{z_i} \overline{c'v'}|_{y=y_r} \, dz - \int_{y_l}^{y_r} \overline{c'w'}|_{z=z_s} \, dy \quad (26) \end{aligned}$$

式(25)と式(26)を足し合わせると混相流の連続式として以下を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} dz \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_s}^{z_i} u \, dz \, dy \\ & = \int_{z_s}^{z_i} V_r \, dz + \int_{z_s}^{z_i} V_l \, dz + \int_{y_l}^{y_r} w_{se} \, dy - \int_{y_l}^{y_r} w_{be} \, dy \quad (27) \end{aligned}$$

### 5. レイノルズ方程式の層積分と断面積分

レイノルズ方程式(10)で境界層近似が成立すると考える。すなわち、主流が卓越し、流下方向の変化がこれと直交方向の変化に比べて十分小さいと考え無視する。また  $x$  方向のせん断応力項もこれと直交方向のせん断応力項に比べて十分小さいとしてこれを無視する。また、流れを漸変流と考え、圧力が静水圧分布で近似する。ただし、斜面の傾斜角を  $\theta$  とするとき、重力加速度成分  $g$  は次のようにならわされる。

$$g_1 = g \sin \theta; \quad g_2 = 0; \quad g_3 = -g \cos \theta \quad (28)$$

$x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向のレイノルズ方程式は以下のようにになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} uv + \frac{\partial}{\partial z} uw = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \quad (29)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uv + \frac{\partial}{\partial y} v^2 + \frac{\partial}{\partial z} vw = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} \quad (30)$$

$$0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (31)$$

次にレイノルズ方程式(29)の層積分を行う。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} uw dz \\ & - u_s \left( \frac{\partial z_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} - w_s \right) \\ & - v_b \left( \frac{\partial z_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - w_b \right) \\ & = \int_{z_b}^{z_s} g \sin \theta dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} p dz - \frac{\partial z_s}{\partial x} p_s + \frac{\partial z_b}{\partial x} p_b \right) \\ & - \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} dz - \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} dz \quad (32) \end{aligned}$$

これを整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} uw dz - u_s w_{se} + u_b w_{be} \\ & = \int_{z_b}^{z_s} g \sin \theta dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} p dz - \frac{\partial z_s}{\partial x} p_s + \frac{\partial z_b}{\partial x} p_b \right) \\ & - \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} dz - \overline{u'w'} \Big|_{z=z_s} + \overline{u'w'} \Big|_{z=z_b} \quad (33) \end{aligned}$$

ここで、水面でレイノルズ応力  $-\overline{u'w'} \Big|_{z=z_s}$  が零になることを用いている。

圧力については、 $z$  方向に流れが緩やかに変化すると仮定している(漸変流近似)。このとき圧力は静水圧で近似できる。すなわち、

$$p = \rho g \cos \theta (z_s - z) \quad (34)$$

このとき、式(32)の圧力項は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} p dz - \frac{\partial z_s}{\partial x} p_s + \frac{\partial z_b}{\partial x} p_b \\ & = \rho g \cos \theta \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (z_s - z_b)^2 + p g (z_s - z_b) \cos \theta \frac{\partial z_b}{\partial x} \\ & = \rho g (z_s - z_b) \cos \theta \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (35) \end{aligned}$$

この式を式(33)に代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} uw dz - u_s w_{se} + u_b w_{be} \\ & = \int_{z_b}^{z_s} g \sin \theta dz - g (z_s - z_b) \cos \theta \frac{\partial z_s}{\partial x} \\ & - \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} dz + \overline{u'w'} \Big|_{z=z_s} \quad (36) \end{aligned}$$

上式が  $x$  方向のレイノルズ方程式の層積分方程式である。同じ操作を行うことにより、 $y$  方向のレイノルズ方程式の層積分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} v^2 dz \\ & - v_s w_{se} + v_b w_{be} = \int_{z_b}^{z_s} g \sin \theta dz - g (z_s - z_b) \cos \theta \frac{\partial z_s}{\partial y} \\ & - \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'v'} dz + \overline{u'w'} \Big|_{z=z_s} \quad (37) \end{aligned}$$

式(36)と式(37)がレイノルズ方程式の層積分方程式であり、浅水流方程式と呼ばれる(池田, 1992)。今回の解析で

明らかにされたのは、質量保存式と同様、降雨を表す項として、式(36)では $-u_s w_{s,e} + u_s w_{b,e}$ の項が含まれること、及び式(37)では $-v_s w_{s,e} + v_s w_{b,e}$ の項が含まれる点である。

式(36)を $y_l \leq y \leq y_r$ の範囲でさらに積分(断面積分)し一次元の運動量方程式を導く。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} u \, dz \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} u^2 \, dz \, dy \\ & - \frac{\partial y_r}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u \, dz - \frac{\partial y_l}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u^2 \, dz + \int_{z_b}^{z_s} u v_r \, dz \\ & + \frac{\partial y_l}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} u \, dz - \frac{\partial y_r}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} u^2 \, dz + \int_{z_b}^{z_s} u v_l \, dz \\ & - \int_{y_l}^{y_r} u_s w_{s,e} \, dy + \int_{y_l}^{y_r} u_s w_{b,e} \, dy \\ & = g \sin \theta \int_{y_l}^{y_r} (z_s - z_b) \, dy - g \cos \theta \int_{y_l}^{y_r} (z_s - z_b) \frac{\partial z_s}{\partial x} \, dy \\ & - \int_{z_b}^{z_s} \overline{u'v'} \Big|_{y=y_r} \, dz + \int_{z_b}^{z_s} \overline{u'v'} \Big|_{y=y_l} \, dz + \int_{y_l}^{y_r} \overline{u'w'} \Big|_{z=z_s} \, dy \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、 $y=y_l$ と $y=y_r$ の境界条件として式(23)、(24)が与えられる。そこで、式(38)に式(23)と式(24)を代入する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} u \, dz \, dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} u^2 \, dz \, dy \\ & - \int_{z_b}^{z_s} V u_r \, dz - \int_{z_b}^{z_s} V_l u_l \, dz - \int_{y_l}^{y_r} u_s w_{s,e} \, dy + \int_{y_l}^{y_r} u_s w_{b,e} \, dy \\ & = g \sin \theta \int_{y_l}^{y_r} (z_s - z_b) \, dy - g \cos \theta \int_{y_l}^{y_r} (z_s - z_b) \frac{\partial z_s}{\partial x} \, dy \\ & - \int_{z_b}^{z_s} \overline{u'v'} \Big|_{y=y_r} \, dz + \int_{z_b}^{z_s} \overline{u'v'} \Big|_{y=y_l} \, dz + \int_{y_l}^{y_r} \overline{u'w'} \Big|_{z=z_s} \, dy \end{aligned} \quad (39)$$

上式が運動量方程式(レイノルズ方程式)に基づく一次元の不定流方程式である。この式において、左辺第5項、第6項の降雨と地下への浸透を考慮し項を含んでいるとことに本解析の新規性がある。

### 6. エネルギー方程式の層積分と断面積分

水路の線形の変化が小さい場合にはエネルギー保存則に基づいた解析は運動量方程式に基づく解析に比べて有利である。というのも運動量保存則による解析では側壁や底面のせん断応力を厳密に見積もる必要があるが

るが、エネルギー解析法ではエネルギー損失を見積もることで解析が行うことができる。線形が変化する流れでのエネルギー損失の見積もりに関しては従来より多くの研究がありその結果を用いることができるためである。一方、開水路の一次元解析を行うにあたり、エネルギー方程式である摩擦を考慮した一次元のベルヌイの式から出発して解析を行うことが多い。この方法は簡便ではあるが、本論文の対象とするような降雨や地下浸透、側面からの流出入を正しく評価することは困難である。本論文では、平均流のエネルギー方程式をレイノルズ方程式から誘導し、その式を断面積分する事で一次元不定流方程式を導こうとする点が従来のアプローチと全く異なる点である。本節の様な考察は従来の研究でなされた例はない。

式(40)に $u_i$ をかけて整理すると平均流のエネルギー方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} u u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} u u u_j \\ & = u_i g_i - \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} u \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (40)$$

この式は $E = \frac{1}{2} u u_i$ の関係を用いると次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} E u_j \\ & = u_i g_i - \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} u \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (41)$$

ここでは、平均流のエネルギー方程式から出発して1次元の不定流方程式を導く。

$$\begin{aligned} & \int_{z_b}^{z_s} \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} E u_j \right\} \, dz \\ & = \int_{z_b}^{z_s} \left\{ u_i g_i - \frac{1}{\rho} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} u \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} \, dz \end{aligned} \quad (42)$$

式(42)の左辺の積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{式(42)の左辺} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} E \, dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} E u \, dz \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} E v \, dz - \frac{\partial z_s}{\partial t} E_s - \frac{\partial z_s}{\partial x} E_s u_s - \frac{\partial z_s}{\partial y} E_s v_s \\ & + E_s w_s + \frac{\partial z_b}{\partial t} E_b + \frac{\partial z_b}{\partial x} E_b u_b + \frac{\partial z_b}{\partial y} E_b v_b - E_b w_b \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} E dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} Eu dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} Ev dz - E_{sw} + E_{bw} \quad (43)$$

ここで、水面と底面における式(16)、(17)の境界条件を用いている。

$$\begin{aligned} \text{式(42)の右辺} &= g \sin \theta \int_{z_b}^{z_s} u dz - g \cos \theta \int_{z_b}^{z_s} u dz \\ &- \frac{1}{\rho} \int_{z_b}^{z_s} u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x_j} u \overline{u_i' u_j'} dz - \int_{z_b}^{z_s} Pr. dz \end{aligned} \quad (44)$$

ここにPr.は次式で定義される乱れ運動エネルギーの生成項である。

$$Pr. = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (45)$$

このとき式(44)を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{式(44)} &= g \sin \theta \int_{z_b}^{z_s} u dz - g \cos \theta \int_{z_b}^{z_s} \left( u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} \right) dz \\ &- \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x_j} u \overline{u_i' u_j'} dz - \int_{z_b}^{z_s} Pr. dz \end{aligned} \quad (46)$$

式(43)と式(46)より、平均流のエネルギー方程式の層積分は次のように表される。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} E dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} Eu dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_s} Ev dz \\ &- E_{sw} + E_{bw} = g \sin \theta \int_{z_b}^{z_s} u dz \\ &- g \cos \theta \int_{z_b}^{z_s} \left( u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} \right) dz \\ &- \int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial x_j} u \overline{u_i' u_j'} dz - \int_{z_b}^{z_s} Pr. dz \end{aligned} \quad (47)$$

一次元の不定流方程式を求めるため、式(47)を  $y_1 \leq y \leq y_2$  の範囲で積分する。

$$\begin{aligned} &\int_{y_1}^{y_2} \{ \text{式(47)の左辺} \} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} E dz dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} Eu dz dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\partial y_r}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} E_r dz - \frac{\partial y_r}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} E_r u_r dz + \int_{z_b}^{z_s} E_r v_r dz \\ &+ \frac{\partial y_l}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} E_l dz + \frac{\partial y_l}{\partial x} \int_{z_b}^{z_s} E_l u_l dz + \int_{z_b}^{z_s} E_l v_l dz \\ &- \int_{y_1}^{y_2} E_{sw} dz dy + \int_{y_1}^{y_2} E_{bw} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} E dz dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} Eu dz dy \\ &- \int_{z_b}^{z_s} E_r V_r dz - \int_{z_b}^{z_s} E_l V_l dz - \int_{y_1}^{y_2} E_{sw} dy \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} E_{bw} dy \end{aligned} \quad (48)$$

ここで上式の展開において式(23)と式(24)を用いている。また、式(47)の右辺の積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\int_{y_1}^{y_2} \{ \text{式(47)の右辺} \} dy \\ &= g \sin \theta \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} u dz dy \\ &- g \cos \theta \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} \left( u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} \right) dz dy \\ &- \int_{z_b}^{z_s} (u \overline{u_i' v'} |_{y=y_2} - u \overline{u_i' v'} |_{y=y_1}) dz \\ &+ \int_{y_1}^{y_2} (u \overline{u_i' w'} |_{z=z_s} - u \overline{u_i' w'} |_{z=z_b}) dy \\ &- \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} Pr. dz dy \end{aligned} \quad (49)$$

式(48)、式(49)、及び境界条件を考慮すると式(47)は次のように積分される。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} E dz dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} Eu dz dy \\ &- \int_{z_b}^{z_s} E_r V_r dz - \int_{z_b}^{z_s} E_l V_l dz - \int_{y_1}^{y_2} E_{sw} dy + \int_{y_1}^{y_2} E_{bw} dy \\ &= g \sin \theta \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} u dz dy \\ &- g \cos \theta \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} \left( u \frac{\partial z_s}{\partial x} + v \frac{\partial z_s}{\partial y} \right) dz dy - \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_b}^{z_s} Pr. dz dy \end{aligned} \quad (50)$$

上式が平均流の運動エネルギー方程式に基づく一次元の不定流方程式である。以下の取り扱いでは、水路の主流速を  $u$  とすると  $E$  は次のようになる。

$$E = \frac{1}{2} u^2 \quad (51)$$

### 7. 開水路流の一次元解析法

これまでに連続式の断面積分式(27), レイノルズ方程式の断面積分式(39), 平均流のエネルギーの断面積分式(50)を導いた。本節ではさらにこれらの式に含まれる積分を種々の断面平均量と各種の補正係数を導入して表す。すなわち, 次のようになる。水路の断面積を  $A$ , 断面平均流速を  $U$ , 水路幅を  $B$  とする。

$$\int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} dz dy = A \quad (52)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} E dz dy = \beta \frac{1}{2} U^2 A \quad (53)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} Eu dz dy = \alpha \frac{1}{2} U^3 A \quad (54)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} V_r dz = q_r \quad (55)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} V_l dz = q_l \quad (56)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} w_{se} dy = w_{se} B \quad (57)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} w_{be} dy = w_{be} B \quad (58)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} V_r u_r dz = \beta_1 q_r u_r \quad (59)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} V_l u_l dz = \beta_1 q_l u_l \quad (60)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} E V_r dz = \alpha_1 \frac{1}{2} u_r^2 q_r \quad (61)$$

$$\int_{z_b}^{z_s} E V_l dz = \alpha_1 \frac{1}{2} u_l^2 q_l \quad (62)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} E w_{se} dy = \alpha_2 \frac{1}{2} u_s^2 w_{se} B \quad (63)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} E w_{be} dy = \alpha_2 \frac{1}{2} u_b^2 w_{be} B \quad (64)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} u \frac{\partial z_s}{\partial x} dz dy = UA \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (65)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} v \frac{\partial z_s}{\partial y} dz dy = UA \frac{\partial z_s}{\partial y} = 0 \quad (66)$$

$$\int_{y_l}^{y_r} \int_{z_b}^{z_s} Pr \cdot dz dy = Pr \cdot A \quad (67)$$

ここで,  $\alpha$  はエネルギー補正係数,  $\beta$  は運動量補正係数,  $\alpha_1, \alpha_2$  は一種のエネルギー補正係数,  $\beta_1$  は一種の運動量補正係数である。また,  $q_r, q_l$  は右岸, 左岸からの流出入量,  $w_{se}$  は降雨,  $w_{be}$  は地下浸透,  $u_r, u_l$  は右岸, 左岸の局所流速,  $u_s, u_b$  は水面と底面の局所流速である。

このとき式(27)は次のようになる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial UA}{\partial x} = q_r + q_l + w_{se} B - w_{be} B \quad (68)$$

運動量方程式(39)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial UA}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \beta U^2 A = & \beta_1 q_r u_r + \beta_1 q_l u_l + w_{se} u_s B - w_{be} u_b B \\ & + Ag \sin \theta - g \cos \theta A \frac{\partial z_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \tau_0 S \end{aligned} \quad (69)$$

ここで,  $\tau = -\rho \overline{u'w'}|_{z=z_b}$  は底面せん断応力,  $S$  は潤辺長である。

平均流のエネルギー方程式(50)は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \beta \frac{1}{2} U^2 A + \frac{\partial}{\partial x} \alpha \frac{1}{2} U^3 A = & \alpha_1 \frac{1}{2} u_r^2 q_r + \alpha_1 \frac{1}{2} u_l^2 q_l \\ & + \alpha_2 \frac{1}{2} u_s^2 w_{se} B - \alpha_2 \frac{1}{2} u_b^2 w_{be} B \\ & + g \sin \theta UA - g \cos \theta UA \frac{\partial z_s}{\partial x} - Pr \cdot A \end{aligned} \quad (70)$$

以上のように一次元の不定流方程式は運動量保存式による場合は式(69), エネルギー保存式による場合は式(70)を用いて, 連続式(68)とともに解くことによって解析できる。そこでの未知数は水深  $h$  と断面平均流速  $U$  である。この式は非定常の連立偏微分方程式であり, 元の基礎微分方程式を解くよりは易しいが, それでもかなりの困難を伴う。



## 8. 水面形方程式

ここで得られた式について定常流れに限定し、二種類の水面形方程式を導き、どのような項で構成されるのかについて考察を行う。従来の方法である、運動量保存則により求められた水面形との違いを考察するため、従来の式では考慮されていない降雨と地下浸透が零の場合に限定する。すなわち、式(68)、(70)に於いて横流入 $q$ 、降雨量 $w_{s,0}$ 、浸透量 $w_{b,0}$ が零でなかつ流れが定常の場合には次のようになる。

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad (71)$$

$$\frac{d}{dx} \alpha \frac{1}{2} U^3 A = \beta_1 \frac{1}{2} u^2 q + g \sin \theta UA - g \cos \theta UA \frac{\partial z_s}{\partial x} - Pr.A \quad (72)$$

式(72)の左辺は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} \alpha \frac{1}{2} U^3 A = -\alpha U^3 B \frac{dh}{dx} - \alpha U^3 h \frac{dB}{dx} + \frac{3}{2} \alpha U^2 q, \quad (73)$$

式(73)を用いると式(72)は次のようになる。

$$(g \cos \theta UA - \alpha U^3 B) \frac{dh}{dx} - \alpha U^3 h \frac{dB}{dx} - \frac{3}{2} \alpha U^2 q + \beta_1 \frac{1}{2} u^2 q + g \sin \theta UA - Pr.A \quad (74)$$

乱れエネルギーの生成項は補遺の(7)により求めることができる。

以上により平均流のエネルギー方程式に基づいて導かれた水面形方程式は次のようになる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{1 - Fr^2} (B_* - q_* + \tan \theta - P d_*) \quad (75)$$

ここで、

$$Fr^2 = \frac{\alpha U^2}{gh \cos \theta} \quad (76)$$

$$B_* = \frac{\alpha U^2}{gh \cos \theta} \frac{dB}{dx} \quad (77)$$

$$q_* = \frac{(3/2) \alpha U^2 - (1/2) \beta_1 u^2}{gB \cos \theta} \frac{q_r}{Uh} \quad (78)$$

$$P_{d*} = \frac{U^2}{gh \cos \theta} \frac{1}{K} \left( \frac{f'}{2} \right)^{3/2} \left\{ \ln \left( Re \sqrt{\frac{f'}{2}} \right) - 1 \right\} \quad (79)$$

一方、運動量方程式から得られる水面形方程式は次のように表される。

式(69)の右辺は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} \beta U^2 A = -\beta U^2 B \frac{dh}{dx} - \beta U^2 h \frac{dB}{dx} + 2 \beta U q, \quad (80)$$

これを式(69)に代入すると

$$(g \cos \theta A - \beta U^2 B) \frac{dh}{dx} = \beta U^2 h \frac{dB}{dx} - 2 \beta U q + u_r q_r + Ag \sin \theta - \frac{1}{\rho} \tau_0 S \quad (81)$$

を得る。補遺の式(96)を用いると底面及び側面に作用するせん断応力 $\tau_0/\rho$ は

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{f'}{2} U^2 \quad (82)$$

となる。この式の両辺を $g \cos \theta A$ で割り $dh/dx$ を求めると

$$\frac{dh}{dx} = \frac{1}{1 - Fr_m^2} (B_{*m} - q_{*m} + \tan \theta - i_r) \quad (83)$$

を得る。ここで

$$Fr_m^2 = \frac{\beta U^2}{gh \cos \theta} \quad (84)$$

$$B_{*m} = \frac{\beta U^2}{gh \cos \theta} \frac{dB}{dx} \quad (85)$$

$$q_{*m} = \frac{2 \beta U^2 - U u_r}{gB \cos \theta} \frac{q_r}{Uh} \quad (86)$$

$$i_r = \frac{U^2}{gR \cos \theta} \frac{f'}{2} \quad (87)$$

であり、 $R$ は次に示す径深である。

$$R = \frac{A}{S} \quad (88)$$

以上のように得られた式(83)が運動量方程式に基づく開水路の水面形方程式である。

従来の方法では運動量保存則を仮定し、横流入がある場合として次式が求められている(日野, 1983)。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-(2U-u_*)\frac{q}{gA} + \tan\theta - i_f}{1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}} \quad (89)$$

式(83)と式(89)と比較すると、式(89)は式(83)の補正係数  $\beta$  を1とし、水路幅を一定 ( $B_{*m}=0$ ) としたとき、全く同じ式になることがわかる。つまり、今回導いた式の特異な場合が従来から提案されている式(89)になっている。

次に、平均流の運動エネルギー方程式と運動量方程式を用いた水面形方程式 (式(75)と式(83)) を比較する。 $F_*^2$ と $F_{*m}^2$ 、 $B_*$ と $B_{*m}$ の違いはエネルギー補正係数  $\alpha$  と運動量補正係数  $\beta$  の違いに依る。 $\alpha$  と  $\beta$  は何れも1に近い値をとることが知られている。従って $F_*^2$ と $F_{*m}^2$ 及び $B_*$ と $B_{*m}$ はほぼ同じ値をとると予想される。 $q_*$ と $q_{*m}$ の違いは、その中の流速に関連する項である  $\{(3/2)\alpha U^2 - (1/2)\beta u_*^2\}$ と $\{2\beta U^2 - u_*U\}$ の違いである。 $\alpha$  と  $\beta$  が等しく、 $U = u_*$  が成立すればこれらは等しくなる。一方、水路内の摩擦損失 $P_{f*}$ やせん断抵抗 $i_f$ を表す項は若干その表現が異なっている。

一方、平均流のエネルギー式をもとに得た一次元解析法と運動量保存則をもとに得た一次元解析法の特長は以下のようになる。いま、対象として湾曲部での流れを考える。運動量保存則はベクトル方程式であるから、このような流れを解析する為には二方向の方程式を用いる必要がある。またこれらの式には、それぞれの方向の水面形、せん断応力の分布を知る必要がある。現在までの知識では、湾曲部の平面二次元での水面形と局所的なせん断応力の分布を精度良く見積もるのは困難である。エネルギー方程式では、湾曲部の水面形を詳細に知る必要はない。また、せん断応力の代わりにエネルギー損失を与えれば良いので、これまでの研究で得られたエネルギー損失係数を経験式で記述することもできる。すなわち、運動量方程式に基づく一次元方程式を用いるか、エネルギー方程式に基づく式を用いるかはこれらの性格・特徴を十分に考慮する必要がある。

また、ここで用いた一次元不定流の基礎方程式は、水路の勾配の変化、断面積の拡大や縮小、横流入や横流出、降雨による供給、地下への浸透を考慮できる一般的な流れに適用できる。

## 9. 結 論

平均流のエネルギー方程式とレイノルズ方程式を積分して、開水路の一次元不定流の基礎方程式を導いた。

これは流体力学の分野で広く用いられている、層積分方程式の解析法を開水路の流れに適用したものである。このような解析法を行ったのは、従来の一次元解析法は、Bernoulliの式や運動量保存則などから天下りに与えられていたため、流入、流出などの複雑な境界条件に対してどのような式を用いたら良いか判断に迷う点があったためである。

本論文は、流体力学の厳密な基礎微分方程式から出発することによって、演算のどこでどのような仮定を用いるのか、また、どのような境界条件を考慮しているかを明らかにすることを目的として行った。この定式化で水面での降雨、底面での地下水浸透の効果がそれぞれ水面と底面での境界条件を通して導入されることが明らかにされた。また、横断方向の積分を行う際考慮される、側面での境界条件を通して、側方からの水の流出入が合理的に評価できることも明らかにされた。さらにこれらの項は、レイノルズ方程式、平均流のエネルギー方程式にもあらわれ、運動量の収支、エネルギーの収支に寄与することが定式化できた。このように複雑な境界条件を不定流方程式に反映できたことが本解析におけるもっとも重要な結論である。

今回得られた一次元の不定流方程式の基本的な性質を比較するため、レイノルズ方程式、平均流のエネルギー方程式から導いた不定流方程式に条件をつけ、降雨と地下浸透の項を無視して、従来の手法による水面形方程式を比較した。この結果、今回の式が従来をその特別な場合として含む一般性に富んだ定式化であることを示した。従来の解析法では、厳密な偏微分方程式ではなく、定常流れに対する運動量解析法を通して水面形方程式を求めており、複雑な流れ場を評価することができなかった。この点を理論的に考察した点も本論文の成果である。

**謝辞：** 本研究の一部は文部省科学研究費補助金基盤研究B(代表 福嶋祐介 課題番号 09555156) の補助を受けた。ここに記して深甚なる感謝の意を表します。

## 参考文献

- 池田駿介編, 1992, 流体の非線形現象—数理解析とその応用—, 朝倉書店, pp.103-105.
- Schlichting, H., 1979: Bounbary Leyer Theory, 7th Ed., McGraw-Hill, pp. 201-206.
- 日野幹雄, 1983: 明解水理学, 丸善, pp. 164-167.
- 日野幹雄, 1992: 流体力学, 朝倉書店, pp. 275-282.

補遺1 乱れエネルギーの生成率の評価

式(4)により水面形を求めるためには、乱れエネルギーの生成率に関して何らかの仮定が必要である。乱れの生成率  $Pr.$  は次のように表せる。

$$Pr. = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (90)$$

二次元定常の流れに対して上式は次のようになる。

$$Pr. = -\overline{u'w'} \frac{du}{dz} \quad (91)$$

レイノルズ応力  $-\overline{u'w'}$  は次のような直線分布で表される。

$$-\overline{u'w'} = u_*^2 \frac{z_s - z}{z_s - z_b} \quad (92)$$

ここで  $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$  は底面せん断応力  $\tau_0$  で定義される摩擦速度である。式(91)中の流速勾配は対数分布則より次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \quad (93)$$

ここで、 $\kappa$  はカルマン定数である。式(92)、(93)を式(91)に代入して、 $z_b \leq z \leq z_s$  で積分する。

$$\begin{aligned} Pr.h &= - \int_{z_b}^{z_s} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dz \\ &= \frac{u_*^3}{\kappa} \frac{1}{z_s - z_b} \left\{ z_s \ln \frac{z_s}{z_b} - (z_s - z_b) \right\} \end{aligned} \quad (94)$$

いま底面が滑面であり長さスケールが摩擦速度と動粘性係数による  $\nu / u_*$  で規定されるものとする。このとき式(94)は次のようになる。

$$Pr.h = \frac{u_*^3}{\kappa} \left( \ln \frac{u_* h}{\nu} - 1 \right) \quad (95)$$

摩擦速度  $u_*$  は断面平均流速と摩擦係数  $f'$  により

$$u_*^2 = \frac{f'}{2} U^2 \quad (96)$$

この関係を式(95)に代入すると断面内の乱れ運動エネルギーの生成率は次のようになる。

$$Pr. A = B \frac{1}{\kappa} \left( \frac{f'}{2} \right)^{3/2} U^3 \left\{ \ln \left( Re \sqrt{\frac{f'}{2}} \right) - 1 \right\} \quad (97)$$

ここで、 $Re$  はレイノルズ数であり次式で定義される。

$$Re = \frac{Uh}{\nu} \quad (98)$$

補遺2 記号の説明

本論文で用いた記号は以下の通りである。

- $B$  = 水路の表面幅
- $B_*, B_{*m}$  = 水路幅の拡大率
- $c$  = 固体粒子の平均体積濃度
- $c'$  = 固体粒子の変動体積濃度
- $\hat{c}$  = 固体粒子の瞬間体積濃度
- $\overline{c' u'_i}$  = 濃度速度相関
- $E$  = 平均流の運動エネルギー
- $F_r, F_{r,m}$  = フルード数
- $f'$  = ダルシーワイズバッハの摩擦損失係数
- $g$  = 重力加速度
- $h$  = 水深
- $i_j$  = 摩擦勾配
- $p$  = 平均圧力
- $p'$  = 変動圧力
- $\hat{p}$  = 圧力
- $Pr.$  = 乱れ運動エネルギーの生成項
- $q$  = 単位長さあたりの流入, 流出量
- $q_*, q_{*m}$  = 側壁からの無次元流出入率
- $R$  = 径深
- $S$  = 潤辺長
- $t$  = 時間
- $x_i$  = デカルト座標のテンソル表示
- $U$  = 主流の断面平均流速
- $u$  = 主方向(x)平均流速成分
- $u'$  = 主方向(x)流速の変動成分
- $\hat{u}$  = 主方向(x)流速成分
- $\hat{u}_i$  =  $x_i$ 方向流速成分
- $\hat{u}'_i$  =  $x_i$ 方向流速の変動成分
- $-\overline{u'_i u'_j}$  = レイノルズ応力
- $v$  = 横方向(y)平均流速成分
- $v'$  = 横方向(y)変動流速成分
- $\hat{v}$  = 横方向(y)流速成分
- $V$  = 横方向からの流入量
- $w$  = 上方向(z)平均流速成分

$w'$	= 上方向(z)流速の変動成分
$\hat{w}$	= 上方向(z)流速成分
$w_{be}$	= 地下への浸透
$w_{se}$	= 降雨
$x$	= 主流方向座標
$y$	= 横方向座標
$z$	= 上向き座標

ギリシャ文字は以下のものである。

$\alpha$	= エネルギー補正係数
$\alpha_1$	= 一種のエネルギー補正係数
$\alpha_2$	= 一種のエネルギー補正係数
$\beta$	= 運動量補正係数
$\beta_1$	= 一種の運動量補正係数
$\kappa$	= カルマン定数
$\nu$	= 動粘性係数
$\rho$	= 水の密度
$\theta$	= 主流方向の水路の傾斜角
$\theta_x$	= $x$ 方向の水路の傾斜角
$\theta_y$	= $y$ 方向の水路の傾斜角
$\tau_0$	= 底面せん断応力

以下は添え字である。

$b$	= 底面での値
$i$	= $x$ 方向成分
$l$	= 左岸での値
$r$	= 右岸での値
$s$	= 水面での値
$\wedge$	= 瞬間値