

FIRディジタルフィルタの複素チェビシェフ近似

張 熙*・中山 悟*・吉川 敏則*・武井 由智*

Complex Chebyshev Approximation for FIR Digital Filters

Xi ZHANG*, Satoru NAKAYAMA*, Toshinori YOSHIKAWA*, Yoshinori TAKEI*

Abstract : In many applications of digital signal processing, the complex Chebyshev approximation of digital filters is important that approximates simultaneously the magnitude and phase responses, and then the design method is required. This paper presents an efficient design method for the complex Chebyshev approximation of FIR digital filters. In the proposed method, the design problem is formulated in the form of the linear problem by using the Remez exchange algorithm extended to the complex domain. Moreover, for reduction of computational complexity, the frequency response is obtained by using the Lagrange's interpolation formula in each step of the iteration process. It is clear that the proposed method has a comparable frequency response with a fewer computational complexity than the conventional methods.

Key words : FIR digital filter, complex Chebyshev approximation, Remez exchange algorithm, Lagrange's interpolation formula

1. まえがき

ディジタルフィルタの設計では、RemezアルゴリズムがFIR直線位相フィルタの設計に有効であることがよく知られている [1] ~ [5]。FIR直線位相フィルタの設計問題は多項式の実チェビシェフ近似問題に帰着でき、その設計アルゴリズムは有名な交番定理に基づいている。一方、ディジタル信号処理の多くの応用では、指定された振幅特性と位相特性を有するディジタルフィルタが要求され、その設計法が必要である。任意の振幅特性と位相特性を同時に近似する問題は複素チェビシェフ近似問題であり、その設計法に関する研究が現在盛ん行われている [6] ~ [16]。FIRフィルタの複素チェビシェフ近似に関しては、いままで線形計画法 [7], [9], [11], [12], [15]、重み付き最小二乗法 [10], [14] や非線型最適化手法 [6] などを用いた設計法が提案されているが、いずれも膨大な計算量が必要である。また、効率的なRemezアルゴリズムを複素領域に拡張して計算量の低減を図った設計法も文献 [8] と [13] で提案されている。複素領域においては、交番定理が成り立たないため、設計問題は実チェビシェフ近似の場合と比べると、遥かに難しくなる。そこで、文献 [13] では、誤差関数が実の場合と同様に交番するように制約条件を課した上で、定式化を行ったが、一般性に欠けると思われる。文献 [8] では、複素Remezアルゴリズムに

基づいて定式化し、また、設計アルゴリズムが収束するように、誤差関数の振幅を少しずつ修正しながら反復計算を行った。しかし、反復計算の回数が非常に多くなるという問題点があった。

本論文では、複素Remezアルゴリズムを用いたFIRフィルタの効率的な複素チェビシェフ近似法を提案する。本設計法では、複素Remezアルゴリズムを用いて、フィルタの設計問題を線形問題の形で定式化する。よって、誤差関数の極値周波数点がわかれば、線形方程式を解き、フィルタ係数が計算できる。そして、極値周波数点とその点における誤差関数の位相を更新しながら反復計算を行い、等リプル特性を求める。各反復計算の過程において、文献 [4] と [5] と同様に、線形方程式を直接解かず、Lagrangeの内挿公式を用いてフィルタの周波数特性を求め、計算量の低減を図る。本設計アルゴリズムでは、収束解に大きな影響を及ぼす初期値の設定が非常に重要である。そこで、近似帯域に初期サンプル周波数点を設定し、それらの点において誤差関数が零となるようにフィルタ係数の初期値を求めている。よって、設計アルゴリズムが必ず収束するとの保証はないが、初期サンプル周波数点を適切に設定することにより、わずかな反復回数で設計アルゴリズムが収束し、等リプル特性が得られる。最後に、本設計法を用いて様々なタイプのFIRフィルタを設計し、計算量や周波数特性について従来法との比較を行う。その結果から、従来法よりも少ない反復回数で、ほぼ同等の周波数特性が得られることを示す。

原稿受付：平成15年5月13日

*長岡技術科学大学工学部電気系

2. FIRフィルタの複素チェビシェフ近似

次数 N のFIRデジタルフィルタの伝達関数 $H(z)$ は、

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n} \quad (1)$$

で定義される。ここで、フィルタ係数 h_n は一般に複素数である。フィルタの周波数特性 $H(e^{j\omega})$ は、

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-j\omega n} \quad (2)$$

である。 $H(e^{j\omega})$ が正と負の周波数領域において、複素共役関係を満たすとき、フィルタ係数 h_n は実数となり、実係数フィルタとなる。所望の周波数特性を $H_d(e^{j\omega})$ と仮定すると、

$$H_d(e^{j\omega}) = |H_d(e^{j\omega})| e^{j\theta_d(\omega)} \quad (3)$$

である。ここで、 $|H_d(e^{j\omega})|$ は所望の振幅特性であり、 $\theta_d(\omega)$ は所望の位相特性である。フィルタの周波数特性と所望の周波数特性の差を誤差関数 $E(\omega)$ として以下のように定義する。

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega) [H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})] \\ &= |E(\omega)| e^{j\theta_e(\omega)} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $W(\omega)$ は重み関数であり、常に正の値をとる。 $|E(\omega)|$ は $E(\omega)$ の振幅特性で、 $\theta_e(\omega)$ は位相特性である。FIRフィルタの複素チェビシェフ近似問題は、近似帯域 R （例えば、通過域または阻止域）において、誤差関数 $E(\omega)$ の最大振幅を最小化する問題である。即ち、

$$\min_{h_n} \{ \max_{\omega \in R} |E(e^{j\omega})| \} \quad (5)$$

である。フィルタの振幅誤差 $\Delta H(\omega)$ と位相誤差 $\Delta\theta(\omega)$ は、

$$\Delta H(\omega) = |H(e^{j\omega})| - |H_d(e^{j\omega})| \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta(\omega) &= \arg\{H(e^{j\omega})\} - \arg\{H_d(e^{j\omega})\} \\ &= \theta(\omega) - \theta_d(\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

で表される。よって、図1に示されるように、

$$|E(\omega)| \leq \frac{\delta_{max}}{W(\omega)} \quad (8)$$

とすると、

$$|\Delta H(\omega)| \leq \frac{\delta_{max}}{W(\omega)} \quad (9)$$

$$|\Delta\theta(\omega)| \leq \Delta\theta_{max} = \sin^{-1} \left\{ \frac{\delta_{max}}{W(\omega) |H_d(e^{j\omega})|} \right\} \quad (10)$$

となる。従って、誤差関数 $E(\omega)$ の最大振幅 δ_{max} を最小化することにより、フィルタの振幅誤差 $\Delta H(\omega)$ と位相誤差 $\Delta\theta(\omega)$ を同時に低減することができる。

3. 複素Remezアルゴリズムによる定式化

従来の実チェビシェフ近似の場合、誤差関数 $E(\omega)$ は実関数であるため、その位相 $\theta_e(\omega)$ は0もしくは π である。よって、 $E(\omega)$ の符号が交番するという有名な交番定理が知られている。一方、複素チェビシェフ近似では、誤差関数 $E(\omega)$ が複素関数であるため、交番定理が成り立たない。そのため、Remezアルゴリズムを直接用いることが出来ず、その設計問題は遙かに難しくなる。以下では、Remezアルゴリズムを複素領域に拡張して、FIRフィルタの複素チェビシェフ近似問題に適用することを考える。

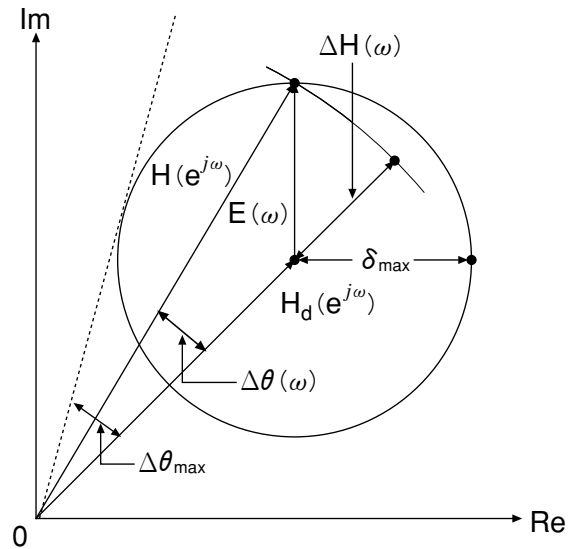


図1 複素チェビシェフ近似

fig. 1 Complex Chebyshev Approximation

まず、近似帯域 R において、 $N+2$ 点のサンプル周波数点 ω_i 選び、それらの周波数点における誤差関数

$E(\omega)$ の位相を $\theta_e(\omega_i)$ とする。これらのサンプル周波数点 ω_i において誤差関数 $E(\omega)$ の振幅が等しくなるように定式化する。即ち、

$$E(\omega_i) = W(\omega_i)[H(e^{j\omega_i}) - H_d(e^{j\omega_i})] = \delta e^{j\theta_e(\omega_i)} \quad (11)$$

である。ここで、 δ は振幅誤差である。 $\theta_e(\omega)$ は、実チェビシェフ近似の場合、0 もしくは π であるが、ここでは任意の値である。即ち、位相 $\theta_e(\omega)$ を任意の値にすることにより、複素チェビシェフ近似が可能になる。式 (11) を変形すると、

$$\sum_{n=0}^N h_n e^{-jn\omega_i} - \frac{e^{j\theta_e(\omega_i)}}{W(\omega_i)} \delta = H_d(e^{j\omega_i}) \quad (12)$$

となり、線形方程式となる。よって、式 (12) の線形方程式を解けば、フィルタ係数が得られる。しかし、フィルタ次数が高くなると、計算量が多くなるという問題点がある。ここでは、計算量の低減の為、式 (12) の線形方程式を解かず、文献 [4] と [5] と同様に、Lagrange の内挿公式を用いて周波数特性 $H(e^{j\omega})$ を直接計算する。即ち、

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^N \left\{ H_d(e^{j\omega_m}) + \frac{e^{j\theta_e(\omega_m)}}{W(\omega_m)} \delta \right\} \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^N \frac{e^{-j\omega} - e^{-j\omega_n}}{e^{-j\omega_m} - e^{-j\omega_n}} \quad (13)$$

となる。ここで、

$$\delta = - \frac{\sum_{n=0}^{N+1} c_n H_d(e^{j\omega_n})}{\sum_{n=0}^{N+1} c_n \frac{e^{j\theta_e(\omega_n)}}{W(\omega_n)}} \quad (14)$$

である。ただし、

$$c_n = \begin{cases} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^N \frac{e^{-j\omega_{N+1}} - e^{-j\omega_i}}{e^{-j\omega_n} - e^{-j\omega_i}} & (n = 0, 1, \dots, N) \\ -1 & (n = N+1) \end{cases} \quad (15)$$

である。従って、サンプル周波数点 ω_i とその周波数点における誤差関数 $E(\omega)$ の位相 $\theta_e(\omega_i)$ が与えられれば、式 (13) により周波数特性を求めることができる。次に、得られた特性から新たな誤差関数 $E(\omega)$ を計算し、極値周波数点 Ω_i とその周波数点における位相 $\theta_e(\Omega_i)$ を求める。次に、それらの極値

周波数点を次のサンプル周波数点 ω_i とし、誤差関数が等リプル特性となるまで反復計算を行う。等リプル特性が得られたら、その周波数特性より逆離散フーリエ変換 (IDFT) によりフィルタ係数が求められる。

4. 初期値の設定

前節に示したように、本設計法では、サンプル周波数点 ω_i とその周波数点における誤差関数の位相 $\theta_e(\omega)$ の初期値の設定が必要である。初期値の設定方法は設計アルゴリズムの収束性やその収束解に大きな影響を及ぼす。本論文では、まず、近似帯域 R に $N+1$ 点の初期サンプル周波数点 $\hat{\omega}_i$ を選択する。設計目標は最大誤差を最小化することであるので、それらの初期サンプル周波数点 $\hat{\omega}_i$ において誤差関数 $E(\omega)$ が零となるように設定する。即ち、

$$E(\hat{\omega}_i) = W(\hat{\omega}_i)[H(e^{j\hat{\omega}_i}) - H_d(e^{j\hat{\omega}_i})] = 0 \quad (16)$$

である。式 (16) を書き換えると、

$$H(e^{j\hat{\omega}_i}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-jn\hat{\omega}_i} = H_d(e^{j\hat{\omega}_i}) \quad (17)$$

となる。同様に内挿公式を用いて周波数特性を求める

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^N H_d(e^{j\omega_m}) \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^N \frac{e^{-j\omega} - e^{-j\omega_n}}{e^{-j\omega_m} - e^{-j\omega_n}} \quad (18)$$

となる。よって、式 (18) より誤差関数 $E(\omega)$ が求められる。ここで、 $E(\omega)$ の極値周波数点は、一般に $N+2$ 点以上生じる。前節で述べたように、設計に必要な極値点の数は $N+2$ 点である。そこで、得られた極値周波数点から振幅の大きい順に $N+2$ 点のサンプル周波数点 ω_i を選び、その位相 $\theta_e(\omega_i)$ を計算し、それらを初期値とする。次に、初期サンプル周波数点 $\hat{\omega}_i$ の選択方法について説明する。一般に、近似帯域において等間隔点 $\hat{\omega}_i$ を選択する。微分器やヒルベルト変換器などの、一つのバンドのフィルタでは、式 (18) の初期値から生じた極値周波数点の数はちょうど $N+2$ 点であり、ほとんどの場合において設計アルゴリズムは収束する。しかし、複数バンドを持つフィルタの場合、極値周波数点の数が $N+2$ 点よりも多いので、必要としない極値周波数点が存在する。また、二つ以上のバ

ンドがあるので、各バンドに周波数点を配分しなければならない。バンドの数が増えるにつれ、組み合わせの数が増加し、さらに問題を複雑にする。従って、複数バンドのフィルタの設計においては、経験的に試行錯誤する必要がある。また、周波数選択フィルタのような場合、カットオフ周波数近辺において、多くの極値周波数点が存在することが経験的に分かっている。そこで、初期サンプル周波数点 $\hat{\omega}_i$ をカットオフ周波数近辺に多く設定すれば、設計アルゴリズムはより速く収束する。

5. 設計アルゴリズム

1. フィルタの次数 N 、所望の周波数特性 $H_d(e^{j\omega})$ 、重み関数 $W(\omega)$ を与える。
2. 近似帯域において、 $N+1$ 個の初期サンプル周波数点 $\hat{\omega}_i$ ($i=0, 1, \dots, N$) を設定する。
3. 式 (18) を用いて、周波数特性 $H(e^{j\omega})$ を求め、得られた $E(\omega)$ から、極値周波数点 Ω_i を探索し、 $N+2$ 個のサンプル周波数点 $\hat{\omega}_i$ を選び、その位相 $\theta_e(\omega_i)$ を求める。
4. 式 (13) を用いて、周波数特性 $H(e^{j\omega})$ を求め、 $E(\omega)$ の極値周波数点を探索する。得られた極値周波数点から振幅の大きい順に $N+2$ 個の周波数点 Ω_i を選び、その位相 $\theta_e(\Omega_i)$ を求める。
5. $|\Omega_i - \omega_i| < \epsilon$ ($i=0, 1, \dots, N+1$) を満たすならば 7. へ。満たさない場合は次に進む。但し、 ϵ は与えられた収束許容値である。(一般に、 $\epsilon = 10^{-8}$ である。)
6. $\omega_i = \Omega_i$ ($i=0, 1, \dots, N+1$) として、4. へ戻る。
7. IDFTにより、フィルタ係数 h_n を得る。

6. 設計例

ここでは、本設計法の有効性を示す為に、いくつかの例題を設計し、従来法とフィルタの周波数特性や必要な計算量などについて比較を行う。

設計例 1 [実係数ヒルベルト変換器]

文献 [16] との比較のため、以下の設計仕様の実係数ヒルベルト変換器の設計について述べる。

設計仕様：

$$N=45$$

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j(15.5\omega + \frac{\pi}{2})} \quad (0.08\pi \leq \omega \leq \pi)$$

$$W(\omega) = 1.0 \quad (0.08\pi \leq \omega \leq \pi)$$

表 1 ヒルベルト変換器の比較

Table 1 Comparison of Hilbert transformer.

—	Proposed	Komodromos [16]
Chebyshev Error	0.00147	0.00140
Group Delay	15.45~15.74	15.45~15.53
Iteration Number	6	226

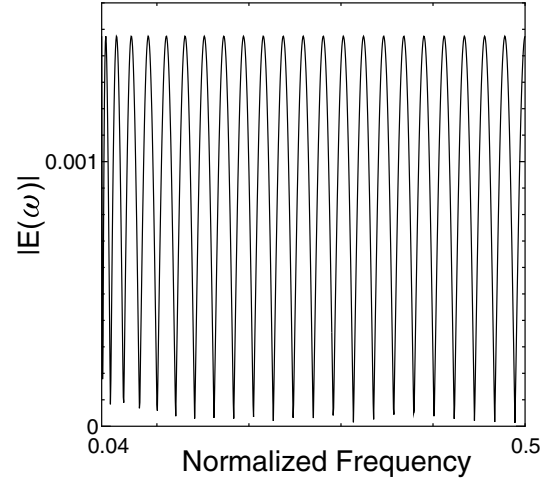


図 2 ヒルベルト変換器の誤差関数の振幅特性

Fig. 2 Magnitude response of error function of Hilbert transformer.

本設計法では、設計アルゴリズムは 6 回の反復計算で収束し、等リプル特性が得られた。ヒルベルト変換器は近似帯域が一つであるので、初期サンプル周波数点 $\hat{\omega}_i$ を等間隔に設定した。本設計例では、次数 N が奇数であるので、 $\hat{\omega}_i \neq \pi$ となるように設定した。また、 N が偶数のときは、 $\hat{\omega}_i = \pi$ となる必要がある。得られた誤差関数の振幅特性を図 2 に示す。最大誤差 $\delta_{max} = 0.00147$ で等リプル特性となっていることが分かる。また、フィルタの振幅特性と群遅延特性を図 3 と図 4 に示す。最大振幅誤差は 0.00146 であり、群遅延の範囲は 15.45 ~ 15.74 である。従来法との比較を表 1 に示す。文献 [16] では、最大誤差は 0.00140 であり、群遅延の範囲は 15.45 ~ 15.53 である。よって、文献 [16] とほぼ同等な周波数特性が得られた。また、文献 [16] では、繰り返しシンプレックス法を用いたため、得られた解は最適解と考えられる。しかし、必要な反復回数は 226 回であり、一回の反復計算で、シンプレックス法を一回用いたため、明らかに、本設計法よりはるかに多くの計算量が必要であった。

設計例 2 [実係数低域通過フィルタ]

文献 [8], [11] との比較のため、以下の設計仕様の実係数低域通過フィルタの設計について述べる。

本設計法では、設計アルゴリズムは 5 回の反復計算

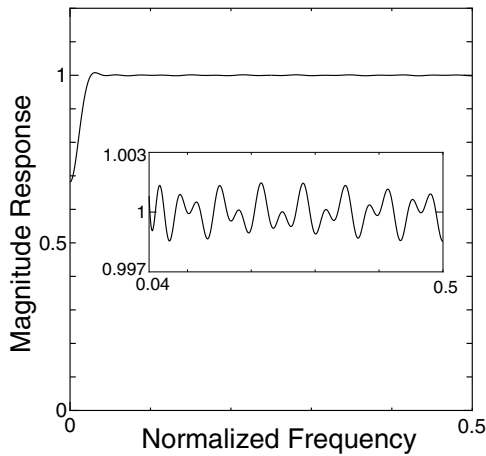


図3 ヒルベルト変換器の振幅特性

Fig. 3 Magnitude response of Hilbert transformer.

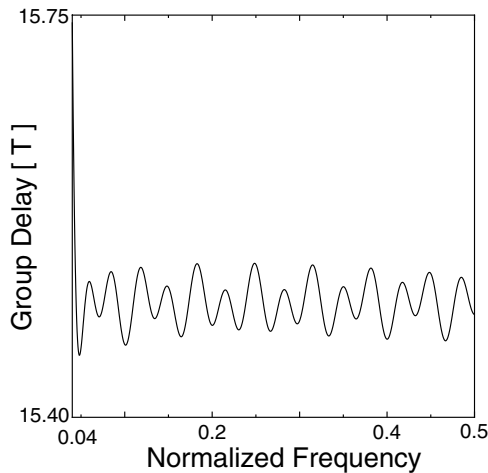


図4 ヒルベルト変換器の群遅延特性

Fig. 4 Group delay response of Hilbert transformer.

設計仕様：

$$N = 30$$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j12.0\omega} & (0 \leq \omega \leq 0.12\pi) \\ 0 & (0.24\pi \leq \omega \leq \pi) \end{cases}$$

$$W(\omega) = \begin{cases} 1.0 & (0 \leq \omega \leq 0.12\pi) \\ 10.0 & (0.24\pi \leq \omega \leq \pi) \end{cases}$$

で収束し、等リプル特性が得られた。得られた誤差関数の振幅特性を文献[8]と[11]の結果と共に、図5に示す。本設計法の最大誤差は $\delta_{max}=0.042759$ である。文献[8]では、最大誤差は $\delta_{max}=0.042696$ であり、本設計法とほぼ同等である。また、文献[11]では、誤差関数が近似帯域において完全な等リプルではなく、最大誤差は $\delta_{max}=0.043128$ であり、最も大きくなっている。

表2 低域通過フィルタの比較

Table 2 Comparison of low-pass filters.

—	Proposed	Preuss [8]	Alkhairy [11]
Chebyshev Error	0.042759	0.042696	0.043128
Passband Atten. [dB]	0.309	0.307	0.336
Group Delay	11.37~13.08	11.39~13.05	11.41~12.95
Iteration Number	5	113	12

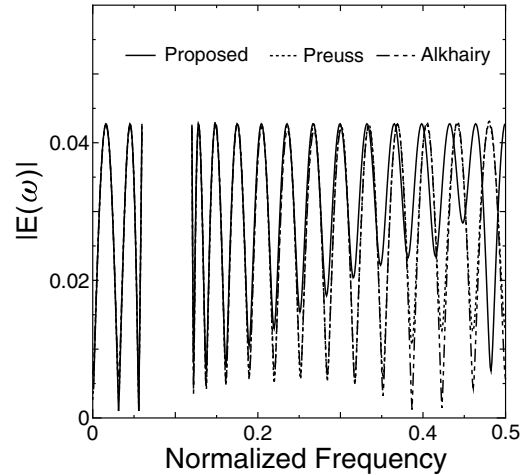


図5 低域通過フィルタの誤差関数の振幅特性

Fig. 5 Magnitude responses of error functions of low-pass filters.

る。フィルタの振幅特性を図6に示し、通過域における振幅特性を図7に示す。群遅延特性を図8に示す。振幅特性、群遅延特性共に従来法とほぼ同等であることが分かる。従来法との比較を表2に示す。本設計法の反復回数が5回に対し、文献[8]では113回、文献[11]では12回であった。文献[11]では、各反復計算で線形計画法を用いたため、計算量が非常に多くなる。また、文献[8]では、同様に複素Remezアルゴリズムを用いたため、一回の反復計算に必要な計算量はほぼ同等であるが、反復回数が非常に多かった。よって、本設計法は文献[8]、文献[11]と比較して少ない計算量でほぼ同等の周波数特性が得られていることが分かる。

設計例3 [複素係数フィルタ]

以下の設計仕様の複素係数フィルタの設計について述べる。

設計仕様：

$$N = 29$$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j13.0\omega} & (0 \leq \omega \leq 0.7\pi) \\ 0 & (0.9\pi \leq \omega \leq 1.7\pi) \end{cases}$$

本設計法では、設計アルゴリズムは19回の反復計算で収束し、等リプル特性が得られた。得られた誤差関

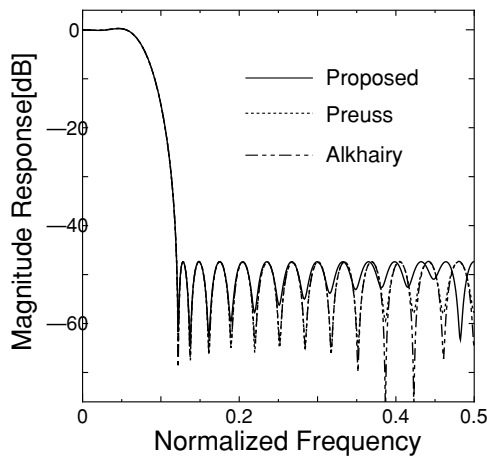


図6 低域通過フィルタの振幅特性

Fig. 6 Magnitude responses of low-pass filters.

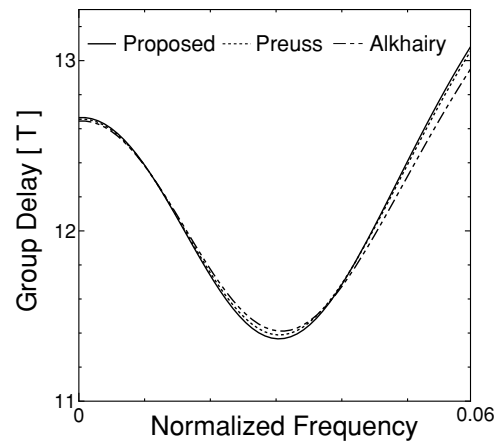


図8 低域通過フィルタの通過域の群遅延特性

Fig. 8 Group delay responses of low-pass filters in passband.

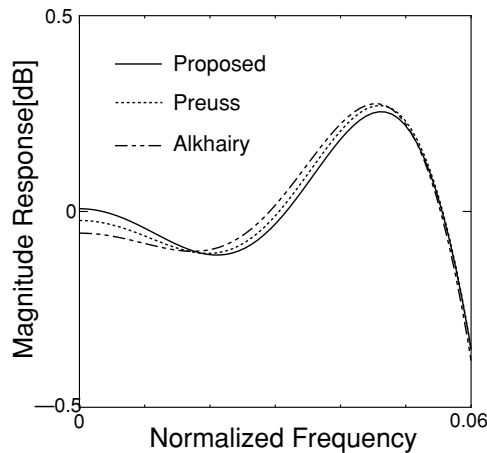


図7 低域通過フィルタの通過域の振幅特性

Fig. 7 Magnitude responses of low-pass filters in passband.

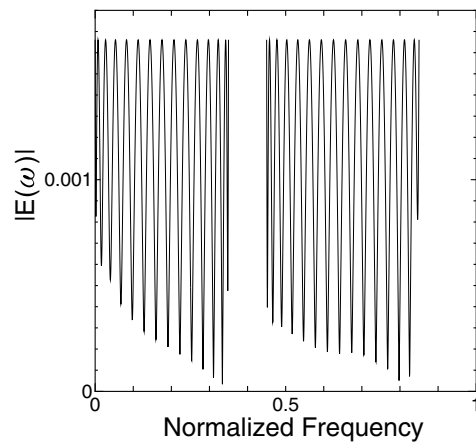


図9 複素係数フィルタの誤差関数の振幅特性

Fig. 9 Magnitude response of error function of complex filter.

数の振幅特性を図9に示す。最大誤差 $\delta_{max}=0.001661$ で等リプル特性となっていることが分かる。フィルタの振幅特性を図10に示し、通過域における振幅特性を図11に示す。通過域における最大振幅誤差は0.001658であり、阻止域の最小減衰量は55.6[dB]である。図12に通過域における群遅延特性を示す。群遅延の範囲は、12.97～13.08となっている。

7. むすび

本論文では、FIRデジタルフィルタの複素チェビシェフ近似のための効率的な設計法を提案した。本設計法では、複素Remezアルゴリズムを用いて、フィルタの設計問題を線形問題の形で定式化した。また、各反復計算の過程で、線形方程式を直接解かず、Lagrangeの内挿公式を用いてフィルタの周波数特性を

計算することで、計算量の低減を図った。そして、初期サンプル周波数点を適切に設定すると、設計アルゴリズムが僅か数回、多くとも十数回で収束したことを設計例を通じて示した。最後に、いくつかの例題を設計し、従来法とフィルタの周波数特性や計算量等について比較を行った。その結果から、従来法よりも少ない計算量で、ほぼ同等の周波数特性を有するフィルタが設計できることを示した。今後の課題としては、マルチバンドフィルタや高次数のフィルタなどの設計が挙げられる。

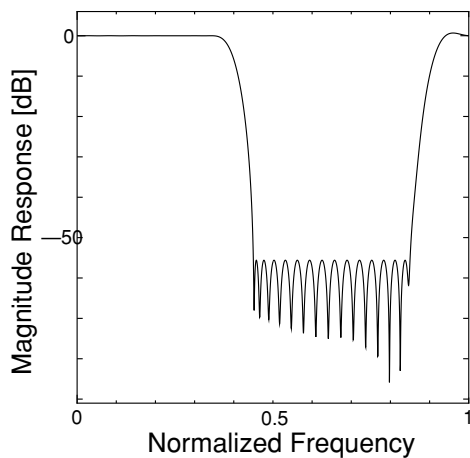


図10 複素係数フィルタの振幅特性

Fig.10 Magnitude response of complex filter.

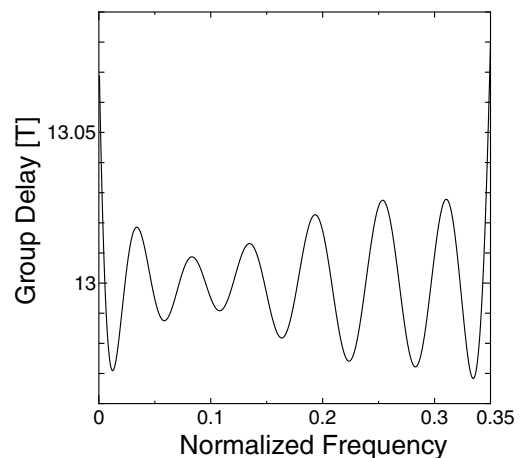


図12 複素係数フィルタの通過域の群遅延特性

Fig.12 Group delay response of complex filter in passband.

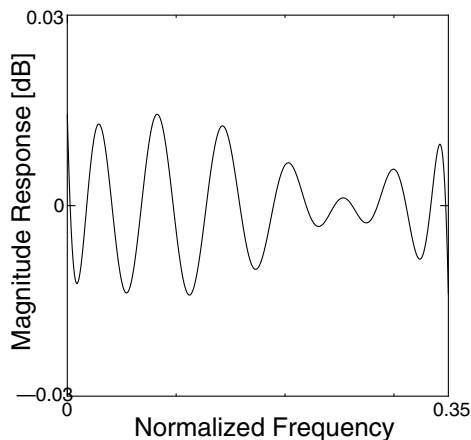


図11 複素係数フィルタの通過域の振幅特性

Fig.11 Magnitude response of complex filter in passband.

文 献

- [1] A.V.Oppenheim and R.W.Schafer, "Digital Signal Processing," Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1975.
- [2] A.Antoniou, "Digital Filters: Analysis, Design, and Applications," McGraw-Hill, 1993.
- [3] S.K.Mitra and J.F.Kaiser, "Handbook for Digital Signal Processing," John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [4] T.W.Parks and J.H.McClellan, "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase," IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-19, no.2, pp.189-194, March 1972.
- [5] J.H.McClellan and T.W.Parks, "A unified approach to the design of optimum FIR linear phase digital filters," IEEE Trans. Circuit Theory, vol.CT-20, no.6, pp.697-701, Nov. 1973.
- [6] G.Cortelazzo and M.R.Lightner, "Simultaneous design in both magnitude and group-delay of IIR and FIR filters based on multiple criterion optimization," IEEE Trans. Acoust., Speech & Signal Processing, vol.ASSP-32, no.5, pp.949-967, oct. 1984.
- [7] X.Chen and T.W.Parks, "Design of FIR filters in the complex domain," IEEE Trans. Acoust., Speech, & Signal Processing, vol.35, no.2, pp.144-153, Feb. 1987.
- [8] K.Preuss, "On the design of FIR filters by complex Chebyshev approximation," IEEE Trans. Acoust., Speech, & Signal Processing, vol.37, no.5, pp.702-712, May 1989.
- [9] N.N.Chit and J.S.Mason, "Complex Chebyshev approximation for FIR digital filters," IEEE Trans. Signal Processing, vol.39, no.1, pp.49-54, Jan. 1991.
- [10] S.C.Pei and J.J.Shyu, "Eigen-approach for designing FIR filters and allpass phase equalizers with prescribed magnitude and phase response," IEEE Trans. Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, vol.39, no.3, pp.137-146, March 1992.
- [11] A.S.Alkhairey, K.G.Cristian and J.S.Lim, "Design and characterization of optimal FIR filters with arbitrary phase," IEEE Trans. Signal Processing, vol.41, no.2, pp.559-572, Feb. 1993.
- [12] D.Burnside and T.W.Parks, "Optimal design of FIR filters with the complex Chebyshev error criteria," IEEE Trans. Signal Processing, vol.43, no.3, pp.605-616, March 1995.
- [13] L.J.Karam and J.H.McClellan, "Complex Chebyshev approximation for FIR filter design," IEEE Trans. Circuits & Systems II: Analog and Digital Signal Processing, vol.42, no.3, pp.207-216, March 1995.
- [14] C.Y.Tseng, "An efficient implementation of Lawson's algorithm with application to complex Chebyshev FIR filter design," IEEE Trans. Circuits & Systems II: Analog and Digital Signal Processing, vol.42, no.4, pp.245-260, April 1995.
- [15] M.Z.Komodromos, S.F.Russell and P.T.P.Tang, "Design of FIR filters with complex desired frequency response using a generalized Remez algorithm," IEEE Trans. Circuits & Systems II: Analog and Digital Signal Processing, vol.42, no.4, pp.274-278, April 1995.
- [16] M.Z.Komodromos, S.F.Russell and P.T.P.Tang, "Design of FIR hilbert transformers and differentiators in complex domain," IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol.45, no.1, pp.64-67, Jan. 1998.

